第5卷 第1期 电子科学学刊 Vol. 5, No. 1
1983年1月 JOURNAL OF ELECTRONICS Jan., 1983

关于产生哈密顿圈的定理及其应用*

陆 生 勋
(杭 州 大 学)

提 要

作者曾提出利用王氏代数产生图的全部哈密顿圈，本文继续研究了这种算法．为了简化计算，给出一个关于王积度数约束的定理，为了避免算法中的不必要的重复，提出一种改进的方法．

最后讨论了本算法在布线设计中的应用等．

一、引 言

文献[1—3]曾提出利用王氏代数产生哈密顿圈．为了简化这种运算，本文建立了一个定理，并给出利用王氏代数计算较复杂的图的一种算法．最后举例说明哈密顿圈在布线设计中的应用等．

二、定理和算法

设 $\mathscr{G}$ 是图 G 的包括零图 θ (null graph) 在内的全部生成子图 G_i 的集合，

$$\mathscr{G}=\{G_1, G_2, \cdots, G_s\},$$

那么幂集 $\mathscr{S}$ 是指 $\mathscr{G}$ 的全部子集合的集合，$\mathscr{S}=\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$，$n=2^s$，其中包括空集 ϕ．若生成子图 G_p $(1\leqslant p\leqslant s)$ 是集合 S_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的一个元素，则用 G_{i_p} 表示这个元素．一个非零生成子图 G_p $(1\leqslant p\leqslant s)$ 的单边集 $S(G_p)$ 定义为

$$S(G_p)=\{x\cup V(G)/x\in X(G_p)\}, \tag{1}$$

其中 $V(G)$ 是图 G 的顶点集，$X(G_p)$ 是生成子图 G_p 的边集．对幂集 $\mathscr{S}$ 定义两个二元运算：环和 (ring sum) 及王氏积(简称W积)，分别记作 $\oplus$ 与 $\odot$．前者定义与文献[4]同，后者定义如下：当 $S_i=\phi$ 时，

$$S_i\odot S_j=S_j\odot S_i=\phi; \tag{2}$$

当 S_i，$S_j\neq\phi$ 时，有

$S_i\odot S_j=\{G_{i_p}\cup G_{i_q}/G_{i_p}$ 属于 S_i，G_{i_q} 属于 S_j，且不包含至少满足以下一个条件的那些元素\}， (3)

$$G_{i_p}\cap G_{i_q}\neq\theta \text{ 的元素}, \tag{3a}$$

集合 $\{G_{i_p}\cup G_{i_q}\}$ 中出现偶数次的相同元素(出现奇数次时看作一个元素)， (3b)

---

* 1982年6月19日收到．

$$\deg_{G_{i_p}\cup G_{i_q}} v > \deg_G v - 2 \text{ 的元素.} \tag{3c}$$

若无条件(3c)的限制,就是文献[4]定义的W积. 易见如此定义的W积满足交换律、结合律和分配律. 而且对于两个或两个以上的 G_{i_p} 构成的集合 S_i 可写成这些 $\{G_{i_p}\}$ 的环和[5]:

$$S_i = \{G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_k}\} = \{G_{i_1}\}\oplus\{G_{i_2}\}\oplus\cdots\oplus\{G_{i_k}\}. \tag{4}$$

在利用W积计算哈密顿圈时,可以应用以下定理简化计算:

定理 1. 设 $\{C_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ 是图 H' 的一个圈基. 又设 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}\}$ 是属于 $V(H')$ 的任意一个非空的顶点子集,而 $\{C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_l}\}$ 是圈基 $\{C_i\}$ 中所有与 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}\}$ 的交不等于空集的圈的全体,则在计算

$$S(C_1)\odot S(C_2)\odot\cdots\odot S(C_m) \tag{5}$$

时,可先计算

$$S(C_{i_1})\odot S(C_{i_2})\odot\cdots\odot S(C_{i_l}), \tag{6}$$

并弃去

$$\deg_{C_{i_1}\cup C_{i_2}\cup\cdots\cup C_{i_l}} v_{i_j} < \deg_{H'} v_{i_j} - 2 \tag{7}$$

各元素,其中 $v_{i_j} \in \{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}\}$.

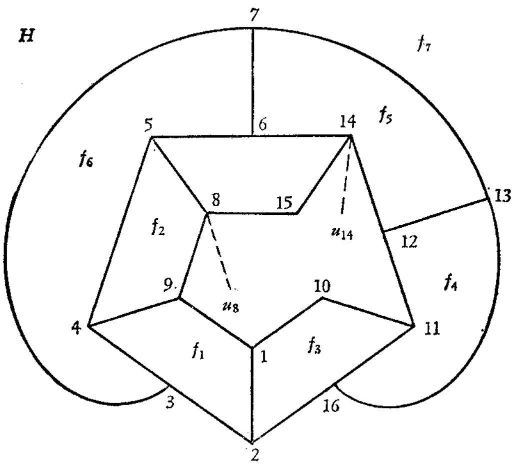

图 1　举例图H

Fig. 1　A graph H for illustrative purpose

现在先举例说明这样的计算,再证明定理成立. 计算图 1 实线所示图H中通过(8, 15),(15, 14)的全部哈密顿圈时,第一步作图

$$H' = H - 15 + (u_8, 8) + (u_{14}, 14)^*.$$

第二步取 $f_1, f_2, \cdots, f_7$ 各面的周界 $C_{f_1}, C_{f_2}, \cdots, C_{f_7}$ 作为一个圈基,计算

$$S(C_{f_1})\odot S(C_{f_2})\odot\cdots\odot S(C_{f_7}). \tag{8}$$

根据定理 1,任选一个非空的顶点子集,譬如说顶点 4,计算式(8)时可先计算圈基中所有通过顶点 4 的圈的全体 $\{C_{f_1}, C_{f_2}, C_{f_6}\}$ 所对应的单边集的W积:

$$\begin{aligned} S(C_{f_1})\odot S(C_{f_2})\odot S(C_{f_6}) = \{&(1,2),(2,3),(3,4),(4,9),(1,9)\} \\ &\odot\{(4,5),(5,\dot{8}),(\dot{8},9),(4,9)\}\odot\{(3,4),(4,5),(5,6), \\ &(6,7),(3,7)\}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 v, $\dot{v}$ 分别表示 $\deg v = 3, 4$ 的顶点. 整理乘得的结果,先列出不含顶点 4 的元素. 于是式(9)等于

$$\begin{aligned} \{&(1,2)(3,7)(5,\dot{8}),(1,2)(3,7)(\dot{8},9),(1,2)(5,6)(\dot{8},9),(1,2) \\ &(5,\dot{8})(6,7),(1,2)(6,7)(\dot{8},9),(1,9)(3,7)(5,\dot{8}),(1,9)(5,\dot{8}) \\ &(6,7),(2,3)(5,6)(\dot{8},9),(2,3)(5,\dot{8})(6,7),(2,3)(6,7)(\dot{8},9), \\ &(1,2)(3,4)(5,\dot{8}),(1,2)(3,4)(\dot{8},9),(1,2)(3,7)(4,5),(1,2) \\ &(3,7)(4,9),(1,2)(4,5)(6,7),(1,2)(4,5)(\dot{8},9),(1,2)(4,9) \end{aligned}$$

* 这里+,−的定义同 J. A. Bondy et al., *Graph Theory with Applications*, MacMillan Press, New York, 1976.

$(5,6),(1,2)(4,9)(6,7),(1,9)(3,4)(5,\dot{8}),(1,9)(3,7)(4,5),$
$(1,9)(4,5)(6,7),(2,3)(4,5)(\dot{8},9),(2,3)(4,9)(5,6),(2,3)$
$(4,9)(6,7),(2,3)(4,5)(6,7),(3,4)(5,\dot{8})(6,7),(3,4)(5,6)$
$(\dot{8},9),(3,4)(6,7)(\dot{8},9),(3,7)(4,9)(5,\dot{8}),(4,9)(5,\dot{8})(6,7)\}.$

以上共 30 个元素，其中前 10 个元素因

$$\deg_{C_{f_1}\cup C_{f_2}\cup\cdots\cup G_{f6}} 4 < \deg_{H'} 4 - 2 = 1,$$

满足式(7)，故可弃去，简化了计算.

定理 1 的证明：

$$S(C_1)\odot S(C_2)\odot\cdots\odot S(C_m) = S(C_{i_1})\odot S(C_{i_2})\odot\cdots \odot S(C_{i_l})\odot S(C_{i_{l+1}})\odot\cdots\odot S(C_{i_m}), \tag{10}$$

设

$$S(C_{i_1})\odot S(C_{i_2})\odot\cdots\odot S(C_{i_l}) = \{H_1', H_2', \cdots, H_s', H_1, H_2, \cdots, H_t\}, \tag{11}$$

其中 H_i' $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 表示计算结果中满足式(7)的元素. 将式(11)代入(10)式，利用分配律和式(4)得到

$$S(C_1)\odot S(C_2)\odot\cdots\odot S(C_m) = \{H_1', H_2', \cdots, H_s'\}\odot S(C_{i_{l+1}})\odot\cdots\odot S(C_{i_m}) \oplus\{H_1, H_2, \cdots, H_t\}\odot S(C_{i_{l+1}})\odot\cdots\odot S(C_{i_m}),$$

容易证明其中

$$\{H_1', H_2', \cdots, H_s'\}\odot S(C_{i_{l+1}})\odot\cdots\odot S(C_{i_m}) = \phi. \tag{12}$$

不然的话设计算结果为 $\{H_1'', H_2'', \cdots\}$ 则计算 $\{H - X(H_1''), H - X(H_2''), \cdots\}$ 时，将有 $\deg_{H-X} v_{i_j} \geqslant 3$ 的顶点，与产生的全部是哈密顿圈相矛盾. 既然式(12)成立，所以在计算式(6)时，弃去满足式(7)的各元素并不影响计算结果，定理得证.

以下，对于较复杂的图提出一种利用W积产生哈密顿圈的方法. 令 v_i 是图 G 的一个顶点，则 v_i 及其所邻接的全部顶点所构成的一个顶点子集称为闭邻域 (closed neighborhood) $N[v_i]$. 设 $\{C_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$ 是 G 的一个圈基，m 是圈秩. 如果存在圈基 $\{C_j\}$ 的一个划分将圈基分为两个圈集 $\{C_k'\}$,$\{C_l''\}$，使得：(1) $\{C_k'\}$ 的每个圈不含 $N[v_i]$ 的任一顶点；(2) $\{C_k'\}$ 至少有两个以上的圈；(3) $\{C_l''\}$ 的每个圈至少含有属于 $N[v_i]$ 的一个顶点；则可按以下步骤产生哈密顿圈，否则用文献[1, 2]的方法.

第一步　设 $\{C_k'\}$ 有 $p \geqslant 2$ 个圈，$k = 1, 2, \cdots, p$，按式 (3) 计算 $S(C_k')$ 的W积，记 $\{G_1, G_2, \cdots, G_g\}$ 为计算的结果，即

$$S(C_1')\odot S(C_2')\odot\cdots\odot S(C_p') = \{G_1, G_2, \cdots, G_g\} \ . \tag{13}$$

第二步　(1) 若 $\deg v_i = 2$，记 $G = H$，转入第三步. (2) 若 $n = \deg v_i > 2$，任意选定此 v_i 所关联的两条边 v_iv_j, v_iv_k，移去其余的 $n-2$ 条边得到子图 H，如此共有 C_n^2 个不同的 H. 如果H有割点，则不含哈密顿圈. 否则转入第三步.

第三步　作 $H' = H - v_i + u_jv_j + u_kv_k$，其中 $u_jv_j, u_kv_k \notin X(H)$.

第四步　从图 G 作出 H' 后，破坏了 $\{C_l''\}$ 中的一些圈，设 $\{C_l''\}$ 中未破坏的圈的全体为 $\{C_{l_i}''\}$, $1 \leqslant i \leqslant m-p$. 计算式(13)和这些圈的单边集 $S(C_{l_i}'')$ 的W积，得

$$\{G_1, G_2, \cdots, G_q\}\odot S(C_{l_1}'')\odot S(C_{l_2}'')\odot\cdots\odot S(C_{l_{m-p}}'') = \{H_1, H_2, \cdots, H_r\}. \tag{14}$$

第五步 计算

$$\{H-X(H_1), H-X(H_2), \cdots, H-X(H_r)\}, \tag{15}$$

就得到通过 v_iv_j, v_iv_k 的全部哈密顿圈. 然后取另一个子图 H, 转入第三步, 直到产生 C_n^2 个不同的 H 的哈密顿圈为止.

证: 此法的特点是将圈基 C_i 分为两个圈集 $\{C'_k\}$, $\{C''_l\}$. 因 $\{C'_k\}$ 的圈不含 $N[v_i]$ 的任一点, 故与关联 v_i 的边取舍无关. 所以在 C_n^2 个不同的子图 H' 的计算中, 式(13)所示的W积恒相同, 只须在第一步中完成这 $p(\geqslant 2)$ 个圈的单边集的W积, 以后在第四步中重复引用. 由此可见本文的算法比文献[1, 2]的算法简单.

注记: 设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是属于 G 的 n 条边, 如果要产生通过这些边的全部哈密顿圈时, 只须在各 $S(C_i)$ 中去掉含有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的各条边就可以了. 因为各 $S(C_i)$ 不含 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 所以式(14)的结果也不含这些边, 因而

$$\{H-X(H_1), H-X(H_2), \cdots, H-X(H_r)\}$$

必含这些边, 得到要产生的哈密顿圈.

文献[6]中指出: "虽然不是一切电子电路都有哈密顿圈, 但考察实际电路的结果, 则几乎是都存在的". 因此文献[6]在存在哈密顿圈的前提下给出两个定理, 其中第二个定理如下:

定理 2 当且仅当圆图能按以下方法将所有的弦分为两类时, 才能把图嵌入一个平面.

(1) 将任意一条弦定义为第一种弦.

(2) 将所有与第一种弦相交的弦作为第二种弦.

(3) 将所有与第二种弦相交的弦作为第一种弦, 以后重复(2), (3).

该文未涉及如何获得哈密顿圈, 如果利用本文提出的产生哈密顿圈的方法, 在求得一个哈密顿圈后即停止, 然后引用上述定理, 就得到一个平面性判别的完整算法. 这种算

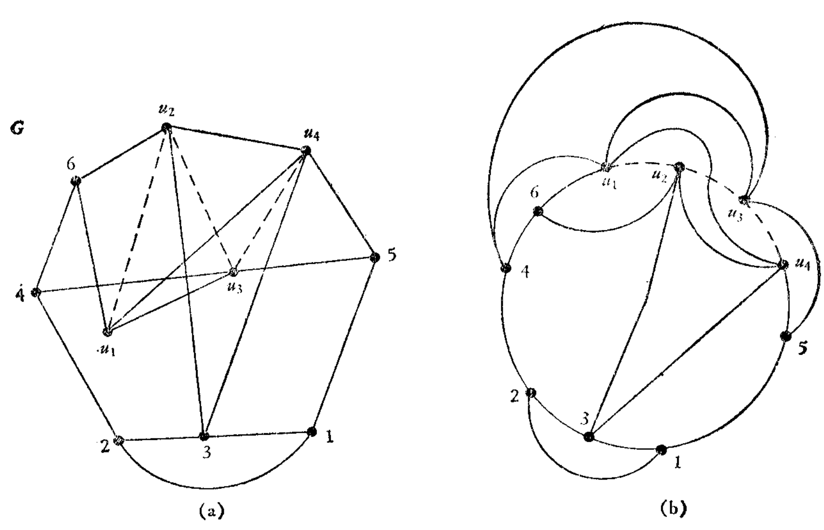

图 2 平面布线举例图 G

Fig. 2 A graph G illustrating the plane layout

法的优点是画出哈密顿圈后比较容易判别是否是平面图．若不是平面图，利用定理 2 容易判定如何移去一些边以得到一个平面图．此外，还便于考虑其他物理约束，例如给出图 2(a) 实线所示的 3 连通图 G，讨论是否能将其中 u_1，u_2，u_3，u_4 4 个顶点所代表的元件依顺序 u_1，u_2，u_3，u_4 紧靠在一起．为此，可先用虚线连接 u_1u_2，u_2u_3，u_3u_4，然后利用W积的算法和上述注记产生一个依顺序通过这 4 个顶点的哈密顿圈 $u_1u_2u_3u_4 513276u_1$．以这个圈为圆，把对应第一种弦的边画在圆内，对应第二种弦的边画在圆外，得到图 2(b)．由此可见 u_2，u_3 之间在平面布线时须通过一条边．注意到每个 3 连通平面图在球面上的嵌入是唯一的，因此无论取那一个哈密顿圈，图 $G-u_1u_4$ 在球面上的嵌入也是唯一的，因此在平面布线时 u_1u_4 之间通过的线也是不可免的．

如果修改W积中对度数的限制式 (3c)，还可利用W积计算流图的 1-因子（1-factor）和 1-因子连通（1-factorial connection）等问题[7]．

参　考　文　献

[1] 陆生勋，电子学报，1980 年，第 1 期，第 29 页．
[2] 陆生勋，杭州大学学报，1980 年，第 1 期，第 63 页．
[3] 金绥更，电子学报，1981 年，第 6 期，第 33 页．
[4] W. K. Chen, *Applied Graph Theory, North-Holland, Amsterdam,* 1976.
[5] I. Berger and A. Nathan, IEEE Trans. on CT, **CT-15** (1968), 221.
[6] 斋藤正男，村木克己，电子通信学会论文誌 (C) **51-C** (1968), 384.
[7] 陆生勋，张礼和，电子学通讯，**4** (1982), 198.

ON THE THEOREM OF GENERATING HAMILTONIAN CYCLES AND ITS APPLICATIONS

Lu Sheng-xun
(*Hangzhou University*)

In this paper the study of the algorithm which has been done by the author for generating all the Hamiltonian cycles in a graph by a method of Wang algebra is continued. For simplifing the algorithm, a theorem of the constraint of degrees in the Wang's product is presented and for avoiding unnecessary repetitions in the algorithm some modified procedures are given.

Finally, the application of the algorithm in layout design is discussed.