

神经网络的逻辑分析¹

郭宝龙 郭雷*

(西安电子科技大学检测与仪器系 西安 710071)

*(西北工业大学自动控制系 西安 710072)

摘要 本文对比约束满足网络, 描述了连续状态神经网络的逻辑理论的基本框架, 给出了矛盾的定量分析方法。分析表明, 神经元逻辑状态变化的根本原因是网络中存在优势矛盾; 神经网络求解的动态过程对应于消除优势矛盾的过程。

关键词 神经网络, 约束满足网络, 推理, 矛盾分析

中图分类号 TN-052

1 引言

由节点和约束组成的约束满足网络 CSN(Constraint Satisfaction Network) 在人工智能(AI)中是十分重要的, 它可以描述很多不同类型的问题^[1]。神经网络(NN)可以看作是开放的约束满足网络^[2], 它适合于求解约束满足问题^[3]。因此与传统的CSN相对应, NN中必然存在相应的逻辑推理理论。通过比较NN与CSN可知, NN是自决定的、开放的、柔性约束的和自适应的CSN。根据这个观点, 本文描述了连续状态神经网络的逻辑理论的基本框架。该理论表明: 神经网络运行的根本原因是网络中存在着优势矛盾; 神经网络求解的过程对应于消除优势矛盾的过程, 而不仅仅是使能量极小^[2,4]。

2 神经网络的逻辑理论

本文讨论逻辑理论时采用的神经网络模型为

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j \neq i} w_{ij}(s_j) + I_i, \quad (1)$$

式中 $s_i = g(p_i)$, $g(x) = \tanh(ax)$, $a > 0$, $w_{ij}(s_j) = t_{ij}s_j$, t_{ij} 是实数。

设 F 是一个有限的因素集: $F = \{f_i\}$, 其中 f_i 表示一个因素。对应于 F 存在一个有限的判决元集合: $D = \{d_i\}$, 其中判决元 d_i 的判断对象是因素 f_i , 所有判决元并行但异步进行操作。 (f_i, d_i) 表示了网络中一个神经元的全部意义。第 i 个判决元的结果是由两个变量 p_i 和 s_i 表示的。 p_i 对应神经元的模势叫作 d_i 的基本状态, s_i 叫作 d_i 的输出状态。

在连续状态神经网络中, 我们对每个判决元定义两个逻辑状态 On 和 Off、一个模糊状态 $\mu(p_i)$ 、和一个逻辑变量 e_i 。

¹ 1994-12-16 收到, 1995-06-24 定稿

国家 863 高技术计划和国家自然科学基金资助项目

定义 1 第 i 个判决元的模糊状态定义为

$$\mu(p_i) = |s_i| \geq 0. \quad (2)$$

定义 2 第 i 个判决元的逻辑变量 e_i 定义为

$$e_i(s_i) = \begin{cases} \text{On}, & s_i \geq 0; \\ \text{Off}, & s_i < 0. \end{cases} \quad (3)$$

定义 3 一个判决元的逻辑状态不再改变, 则该逻辑状态称为结论。

定义 4 当网络中的所有判决元得到结论时, 所有判决元的逻辑状态就是该网络的连接结构所描述的约束满足问题 (CSP) 的解。

在 (1) 式中, 第 i 个判决元的总输入为

$$J_i = \sum_{j \neq i} w_{ij}(s_j) + I_i, \quad (4)$$

即由内部输入 $\lambda_{ij} = w_{ij}(s_j)$ 和外部输入 I_i 组成。由于外部输入 I_i 可以用固定状态的神经元和固定的连接来代替^[5]; 因此在分析中被省略。每个输入 λ_{ij} 有两种相反的类型: 正的和负的。如果用符号 Y 表示 $+1$, 符号 N 表示 -1 ; 那么两种输入类型可分别表示为 αY 和 βN , 其中 α 和 β 是正实数。输入的两种类型分别具有不同的逻辑意义: 类型 Y 是对判决为真的贡献, 类型 N 是对判决为假的贡献。二者之和 $Y + N = 0$ 对判决无影响。 w_{ij} 是一个规则函数, 表示从 d_j 到 d_i 的推理。我们将连接 w_{ij} 分为逻辑的和解析的两个部分, 称作规则和强度, 分别对应权的符号和绝对值。

定义 5 规则函数 $w_{ij}(s_j)$ 是规则类型函数 r_{ij} 、规则强度 $A_{ij}(A_{ij} \geq 0)$ 和模糊状态的乘积:

$$w_{ij}(s_j) = A_{ij} r_{ij}[e_j(s_j)] |s_j|. \quad (5)$$

规则类型函数 r_{ij} 是一个逻辑函数, 它的定义域是 $\{\text{On}, \text{Off}\}$, 值域是 $\{Y, N\}$ 。在 (1) 式中, 当权值为实数且所有神经元取相同的状态域时, 规则只有两种类型 (如表 1 所示); 其神经实现如表 2 所示。

表 2 表明, 规则类型与权值的符号有关但与权值的绝对值无关。权值的符号对应于连接的逻辑行为。而传统表示法是将连接仅仅表示为一个实数, 混淆了连接的逻辑行为和解析行为。

表 1 规则类型函数

类型 I	$r^I[\text{On}] = Y$	$r^I[\text{Off}] = N$
类型 II	$r^{II}[\text{On}] = N$	$r^{II}[\text{Off}] = Y$

表 2 规则的神经实现

规则类型	权值	状态	输入类型
I	正数	$1 \geq s_i \geq -1$	$Y=1$
II	负数	On= 正数; Off= 负数	$N=-1$

由 (4) 式和 (5) 式得出, 判决元 i 接收的总输入是两种输入类型 Y 和 N 的线性组合:

$$J_i = \alpha Y + \beta N, \quad (6)$$

其中 α 和 β 是正实数。在 (1) 式描述的连续状态神经网络中, 如果 $J_i > 0$, 那么基本状态 p_i 将增加; 如果 $J_i < 0$, 那么 p_i 将减少。因此有如下定义:

定义 6 (判决元的决策策略) s_i 当前的变化方向是由它的总输入中类型 Y 和 N 的优势一方决定 (因 $Y + N = 0$, 所以比较是由 (4) 式中的求和运算来完成的):

- (1) 若 $J_i = \zeta Y (\zeta = \alpha - \beta > 0)$, 那么 s_i 随强度 ζ 增大;
- (2) 若 $J_i = \eta N (\eta = \beta - \alpha > 0)$, 那么 s_i 随强度 η 减小;
- (3) 若 $J_i = 0$, 即 (6) 式中 $\alpha = \beta$, 那么 s_i 保持原状态不变。

由于判决的结果是由肯定和否定输入中的强者决定的, 所以判决是相对的而不是绝对的。定义 6 表明, 一个判决的结果是依据众多推理约束; 而且在这些约束中, 没有一个是处于支配地位, 即不存在确定的因果关系。然而这种推理形式对于知觉常常是必要的, 例如对一个边界点的判决要依据很多几乎同等重要的约束^[6]。

3 一致和矛盾

推理所以是弱的, 是因为判决结果 (称为现实) 是来自许多推理之和。因此, 弱推理中必然存在矛盾问题, 即单个推理的输出与现实是否一致的问题。单个推理只能给予期望的结果但不是实际结果。因此, 推理与现实之间的矛盾就成为十分重要的问题。我们使用 **输出状态的变化方向** 和 **逻辑状态** 共同描述判决的行为, 所以有必要定义两类矛盾, 分别称为动态矛盾和逻辑矛盾。

定义 7 (动态一致和动态矛盾) 假设 $A_{ij} > 0$ 且 $ds_i/dt \neq 0$,

- (1) 若 $r_{ij}(s_j) = Y$ 且 s_i 正在增加 ($ds_i/dt > 0$), 或者 $r_{ij}(s_j) = N$ 且 s_i 正在下降 ($ds_i/dt < 0$), 那么推理 $w_{ij}(s_j)$ 与 s_i 的实际变化一致。此刻推理 $w_{ij}(s_j)$ 被称为动态一致推理;
- (2) 若 $r_{ij}(s_j) = Y$ 且 s_i 正在下降 ($ds_i/dt < 0$), 或者 $r_{ij}(s_j) = N$ 且 s_i 正在增加 ($ds_i/dt > 0$), 那么推理 $w_{ij}(s_j)$ 与 s_i 的实际变化矛盾。此刻推理 $w_{ij}(s_j)$ 被称为动态矛盾推理。

定义 8 (逻辑一致和逻辑矛盾) 假设 $A_{ij} > 0$,

- (1) 若 $r_{ij}[e_j] = Y$ 且 $e_i = \text{on}$, 或者 $r_{ij}[e_j] = N$ 且 $e_i = \text{off}$, 那么推理 $w_{ij}(s_j)$ 与 d_i 的逻辑状态是一致的。此刻推理 $w_{ij}(s_j)$ 被称为逻辑一致推理, 并且称 (e_j, e_i) 是逻辑一致的序偶对。
- (2) 若 $r_{ij}[e_j] = Y$ 且 $e_i = \text{off}$, 或者 $r_{ij}[e_j] = N$ 且 $e_i = \text{on}$, 那么推理 $w_{ij}(s_j)$ 与 d_i 的逻辑状态是矛盾的。此刻推理 $w_{ij}(s_j)$ 被称为逻辑矛盾推理, 并且称 (e_j, e_i) 是逻辑矛盾的序偶对。

显然, 一致和矛盾的概念仅仅与规则类型有关, 而与规则强度无关。

定义 8 表明: 按照规则类型 r_{ij} , (e_j, e_i) 具有两种逻辑类型: 一致和矛盾。因此, 一个给定的规则类型 r_{ij} 将 (e_j, e_i) 的所有可能的逻辑状态序偶对分成两类关系集: 逻辑一致关系 $R^\sim(r_{ij})$ 和逻辑矛盾关系 $R^\perp(r_{ij})$; 前者是由逻辑一致的序偶对组成, 后者是由逻辑矛盾的序偶对组成。表 3 是两种规则的序偶对集合, 其中 $\sim$ 和 $\perp$ 分别表示一致和矛盾序偶对。

表 3 表 1 所示规则规定的序偶对 (e_j, e_i) 的类型

Types \ States	(On, On)	(On, Off)	(Off, On)	(Off, Off)
I	$\sim$	$\perp$	$\perp$	$\sim$
II	$\perp$	$\sim$	$\sim$	$\perp$

例如, 对规则 I, $R^\sim(r^I) = \{(On, On), (Off, Off)\}$, $R^\perp(r^I) = \{(On, Off), (Off, On)\}$; 从表 3 可知: 对于每一规则类型, 当给定 e_j 的状态后, 如果 (e_j, On) 是逻辑一致的序偶对, 则 (e_j, Off) 是逻辑矛盾的序偶对; 反之, 如果 (e_j, On) 是逻辑矛盾的序偶对, 则 (e_j, Off) 是逻辑一致的序偶对。因此有如下定理:

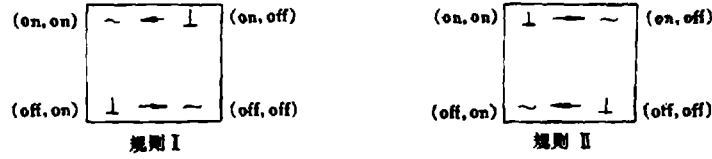


图 1 两种规则类型的转移矩阵

定理 1 如果改变 e_i 状态就将改变序偶对 (e_j, e_i) 的关系类型。

与传统的 CSNs 类似, 我们必须清楚地知道单个规则是怎样限制着判决的。下面考虑单个规则的转移矩阵。图 1 描述了上述两种规则的转移矩阵。矩阵中的每个位置表示 (e_j, e_i) 一个状态; 箭头表示逻辑状态的转移方向。方向的确定是依据表 1、表 3 和定义 6 在忽略 (4) 式中的其它推理, 即 $dp_i/dt = w_{ij}(s_j)$ 时得到的。

定理 2 规则 r_{ij} 对 e_i 的作用是使序偶对 (e_j, e_i) 从逻辑矛盾向逻辑一致运动。

4 一致和矛盾的定量描述

定义 9 定义 DI_{ij} 和 DC_{ij} 分别为规则 w_{ij} 的动态一致测度和动态矛盾测度。

(1) 如果 $ds_i/dt \cdot r_{ij}(s_j) > 0$, 则 $DI_{ij} = A_{ij}|ds_i/dt||s_j|$, $DC_{ij} = 0$;

(2) 如果 $ds_i/dt \cdot r_{ij}(s_j) \leq 0$, 则 $DI_{ij} = 0$, $DC_{ij} = A_{ij}|ds_i/dt||s_j|$;

定义 10 定义 DI_i , DC_i 和 DR_i 分别为第 i 个判决的动态一致、动态矛盾和动态关系测度:

$$DI_i = \sum_{j \neq i} DI_{ij}, \quad DC_i = \sum_{j \neq i} DC_{ij}, \quad DR_i = \sum_{j \neq i} DI_{ij} - \sum_{j \neq i} DC_{ij} = DI_i - DC_i. \quad (7)$$

定义 11 定义 LI_{ij} 和 LC_{ij} 为规则 w_{ij} 的逻辑一致和逻辑矛盾测度。

(1) 如果 $(e_j, e_i) \in R^{\sim}(r_{ij})$, 则 $LI_{ij} = A_{ij}\mu(p_i)|s_j|$, $LC_{ij} = 0$;

(2) 如果 $(e_j, e_i) \in R^{\perp}(r_{ij})$, 则 $LI_{ij} = 0$, $LC_{ij} = A_{ij}\mu(p_i)|s_j|$ 。

定义 12 定义 LI_i , LC_i 和 LR_i 分别为第 i 个判决的逻辑一致、逻辑矛盾和逻辑关系测度:

$$LI_i = \sum_{j \neq i} LI_{ij}, \quad LC_i = \sum_{j \neq i} LC_{ij}, \quad LR_i = \sum_{j \neq i} LI_{ij} - \sum_{j \neq i} LC_{ij} = LI_i - LC_i. \quad (8)$$

定义 13 若 $LR_i > 0$, 则逻辑一致 LI_i 相对于逻辑矛盾 LC_i 来说是占优势, 此时 LC_i 被称作劣势逻辑矛盾; 反之, 若 $LR_i < 0$, 则 LC_i 相对于 LI_i 来说是占优势, 此时 LC_i 被称作优势逻辑矛盾。

5 神经网络运行的逻辑意义和计算机模拟

由 (1)、(2) 和 (5) 式可得

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j \neq i} A_{ij}\mu(p_i)r_{ij}(s_j). \quad (9)$$

由定义 7、9 和 10, 根据 (9) 式分别讨论 $ds_i/dt > 0$ 和 $ds_i/dt < 0$, 可以得出

$$DR_i > 0. \quad (10)$$

上式意味着 dp_i/dt 的符号与 DI_i 的相同, 因此有如下定理,

定理 3 s_i 的输出状态总是沿着删除动态矛盾的方向变化。

由 (9) 式和 (2) 式可得

$$s_i \cdot \frac{dp_i}{dt} = \sum_{j \neq i} A_{ij} s_i \mu(p_i) r_{ij}(s_j). \quad (11)$$

由表 2 当 $(e_j, e_i) \in R^-(r_{ij})$ 时, $s_i r_{ij}(s_j) = \mu(p_i)$; 当 $(e_j, e_i) \in R^+(r_{ij})$ 时, $s_i r_{ij}(s_j) = -\mu(p_i)$; 因此根据定义 11 和定义 12, (11) 式可写为

$$s_i \frac{dp_i}{dt} = \sum_{j \neq i} LI_{ij} - \sum_{j \neq i} LC_{ij} = LR_i. \quad (12)$$

定理 4 判决元输出状态的变化总是为了减少该判决的优势逻辑矛盾。(证明略)

推论 1 一个判决的逻辑状态发生变化的充要条件是该判决的优势逻辑矛盾非零。

推论 1 由 (12) 式可证。该推论表明: 只有优势矛盾才能使判决改变其逻辑状态。

定义 14 定义 CM 和 SC 分别为网络的总矛盾测度和网络的优势矛盾测度:

$$CM = \sum_i \sum_{j \neq i} DC_{ij} + \sum_i \sum_{j \neq i} LC_{ij}, \quad SC = \sum_i U(-LR_i) \sum_{j \neq i} LC_{ij},$$

式中 $U(x) = 0, x < 0$, $U(x) = 1, x \geq 0$ 。

定理 5 所有判决元的输出状态不再变化的必要条件是 $SC = 0$ 。

证明 若所有判决的输出状态不变, 则它们的逻辑状态将不变。由推论 1 可知 $SC = 0$ 。

证毕

推论 2 神经网络运行的目的是为了删除优势矛盾 SC 。

推论 3 神经网络的运行对应于发现一个合适的基本解, 该基本解中可能包含劣势矛盾 ($CM \neq 0$), 但却不能包含优势矛盾 ($SC = 0$)。若网络是稳定的, 那么基本解总是能够求得。

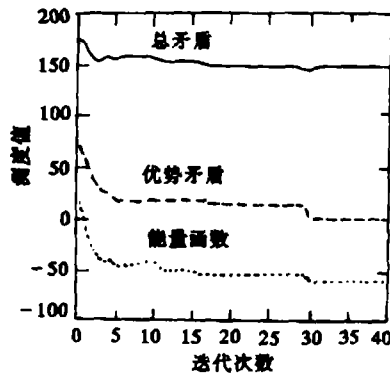


图 2 一个稳定网的模拟结果

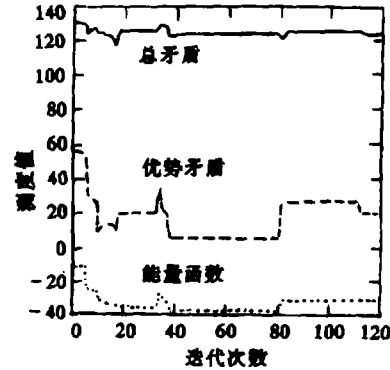


图 3 一个不稳定网的模拟结果

模拟实验采用全连接神经网络, 神经元个数为 20, 神经元的初始状态和权值在 $[-1, 1]$ 上随机选取。图 2 是对一个对称全连接网的模拟结果, 该网是稳定的^[4] 因此优势矛盾最终下降到零; 图 3 是对一个反对称全连接不稳定网的模拟结果, 因为该网不稳定所以优势矛盾并不下降到零。图 2 和图 3 中的上、中、下三条曲线分别表示总矛盾 CM 、优势矛盾 SC 和能量函数^[4]。图中纵座标是测度值, 横座标是迭代次数。这些模拟结果验证了上述分析。

6 讨 论

本文是讨论神经网络的微观性质和组织结构。所表述的推理的思想来自 CSN, 这意味着连接推理是总的概念。神经网络的推理与传统推理有很大区别, 它是分布式、非因果、隐含的和柔性的推理。文中提出一致和矛盾的概念是为了刻画推理和现实之间的动态关系。矛盾分析的价值在于局部矛盾能够反应整体性质。矛盾测度能够可靠地发现矛盾出现在网络中的什么位置, 无需象传统方案那样使用其它的整体规则(如使用不同关系的相容性^[3])来寻找。通常不相容是整体性质, 要确定它出现的位置需要复杂的搜索算法。而矛盾测度只利用局部信息, 因为整体性质自然地体现在神经网的运行之中。

参 考 文 献

- [1] Montanari U, Rossi F. Constraint relaxation may be perfect. *Artificial Intelligence*, 1991, 48(2): 143-170.
- [2] Touretzky D S, Hinton G E. A distributed connectionist production system. *Cognitive Science*, 1988, 12(3): 423-466.
- [3] Guesgen H W, Hertzberg J. A constraint-based approach to spatiotemporal reasoning. *Applied Intelligence*, 1991, 3(1): 71-90.
- [4] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1984, 3088-3092.
- [5] Sejnowski T J, Kienker P K, Hinton G E. Learning symmetry groups with hidden units: Beyond the perceptron. *Physica*, 1988, 22D: 260-275.
- [6] Grossberg S, Mingolla E, Todorovic D. A neural network architecture for preattentive vision. *IEEE Trans. on BME*, 1989, BME-36(1): 65-84.

LOGICAL ANALYSIS FOR NEURAL NETWORKS

Guo Baolong

(*Department of Detection and Instrument, Xidian University, Xi'an 710071*)

Guo Lei

(*Department of Automatic Control, Northwest Polytechnical University, Xi'an 710072*)

Abstract By comparison with constraint satisfaction networks, this paper presents an essential frame of the logical theory for continuous-state neural networks, and gives the quantitative analyzing method for contradiction. The analysis indicates that the basic reason for the alternation of the logical states of the neurons is the existence of superior contradiction inside the networks. The dynamic process for a neural network to find a solution corresponds to eliminating the superior contradiction.

Key words Neural networks, Constraint satisfaction networks, Inference, Contradiction analysis

郭宝龙: 男, 1962 年生, 博士, 副教授, 主要从事神经网络和智能信息处理方面的研究工作。

郭雷: 男, 1956 年生, 博士, 教授, 主要从事神经网络和智能信息处理方面的研究工作。