

多小波图像变换的自适应预滤波¹

王 玲 王卫卫 宋国乡

(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

摘 要 该文基于多小波分解高通能量的极小化,提出了一种计算量小、实现简单的自适应预滤波方法,并将其推广到二维图像,对行与列分别处理,实现了图像的自适应预滤波,使恢复图像质量的整体效果变好。实验结果表明,利用本文提出的自适应预滤波方法进行图像压缩明显优于现有的其它预滤波器。

关键词 多小波, 自适应预滤波, 图像压缩

中图分类号 TN713, O177.6

1 引 言

多小波已经成为小波理论与应用研究的新热点,它克服了单小波正交性与实对称性、短支集与高阶消失矩、正交性与插值性等矛盾,在信号处理和图像压缩等方面的应用有很大的潜力^[1]。1994 年, Geronimo, Hardin 和 Massopust 利用分形插值,成功地构造了正交、短支集、实对称和具有二阶消失矩的多尺度函数 $\varphi(t) = [\varphi_0(t), \varphi_1(t)]^T$,称为 GHM 多小波^[2]。1998 年, Jiang^[3] 给出了 $r = 2$ 的正交多小波参数表达式,随参数 θ 的不同可确定滤波器组,为多小波的实际应用奠定了基础。

尽管对多小波的研究取得了不少结果,但将它们应用于图像处理却非常困难,主要存在两个问题: (1) 大多数多尺度函数不满足低通特性(即 $H(0) \neq I_r$); (2) 如何将一维信号转换为多小波需要的向量输入流。通常的解决办法有: (1) 对原始采样序列作适当的预滤波^[4]; (2) 基于低通特性,平衡改进现有的多小波^[5]。但现有的预滤波器都是针对一维信号的,没有基于图像的预滤波器。平衡的方法虽然简单,但不是所有多小波都能找到正交平衡矩阵,而且性能很好的 GHM 多小波也找不到正交对称的平衡矩阵,给实际处理带来了困难。

实验结果表明^[6] 利用多小波分解各层总能量最小确定预滤波器是一种最优的自适应预滤波方法,但正如文献[6]所指出的,该方法由于计算量大而根本无法推广到二维图像。本文改进了文献[6]的目标函数,提出了一种计算量小、实现简单的自适应预滤波方法。并将其推广到二维图像,基于行与列分别处理,实现了图像的自适应预滤波,使恢复图像质量的整体效果变好。实验结果表明,利用本文提出的自适应预滤波方法进行图像压缩优于现有的其它预滤波器。

2 多小波及其分解重构算法

一组函数 $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)^T (r \geq 1)$ 称为 r 阶正交多小波,如果其伸缩和平移 $\Psi_{j,k} = (\psi_1(2^{-j}x - k), \dots, \psi_r(2^{-j}x - k))^T (j, k \in \mathbb{Z})$ 形成 $L^2(R)$ 的一组正交基。称 $r = 1$ 时 Ψ 为单小波, $r > 1$ 时 Ψ 为多小波。

与单小波一样,生成正交多小波 Ψ 相应的多尺度函数 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)^T$ 仍然满足 r 阶的多分辨分析,即多分辨空间 $V_j = \text{Clos span}\{\varphi_l(2^j x - k), 1 \leq l \leq r, k \in \mathbb{Z}, x \in R\}$; 令 $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ 为 V_j 在 V_{j+1} 空间的正交补,则 $\{2^{j/2}\psi_l(2^{j/2}x - k), 1 \leq l \leq r, k \in \mathbb{Z}, x \in R\}$

¹ 1999-11-16 收到, 2000-07-28 定稿

部级电子预研基金 (G9708C02) 资助项目

是 W_j 的规范正交基。存在 $r \times r$ 的矩阵 H_k 和 G_k , 使 Φ 和 Ψ 满足下列矩阵两尺度方程:

$$\Phi(x) = \sum_{k \in Z} H_k \Phi(2x - k), \quad \Psi(x) = \sum_{k \in Z} G_k \Phi(2x - k) \quad (1)$$

若 $H_k = 0_r, G_k = 0_r, k < 0$ 或 $k > N, n \in Z_+$ (这里 0_r 代表 $r \times r$ 的零矩阵), 则称 $\{\Phi, \Psi\}$ 是紧支的, 此时对应的矩阵频率响应 $\{H, G\}$ 是 FIR 矩阵滤波器组。如果 $\{\Phi, \Psi\}$ 是正交的, 则 $\{H, G\}$ 满足

$$\left. \begin{aligned} H(\omega)H^*(\omega) + H(\omega + \pi)H^*(\omega + \pi) &= I_r \\ G(\omega)G^*(\omega) + G(\omega + \pi)G^*(\omega + \pi) &= I_r \\ H(\omega)G^*(\omega) + H(\omega + \pi)G^*(\omega + \pi) &= 0_r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 I_r 是 $r \times r$ 单位矩阵, 0_r 是 $r \times r$ 的零矩阵。

不妨以 GHM 多小波为例建立多小波的分解重构公式。此时 $r = 2, N = 3, \text{supp}\varphi_1 = [0, 1], \text{supp}\varphi_2 = [0, 2]$, 令

$$P^j = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & H_3 & 0_2 & \cdots & & & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & H_0 & H_1 & H_2 & H_3 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ & & \vdots & & & & & \ddots & \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & & \cdots & & 0_2 & H_0 & H_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

用同样的方法定义 Q^j , 只需将 (3) 式中的 H_i 换成 $G_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 。 P^j 和 Q^j 都是 $(M/2^j) \times (M/2^{j-1})$ 的矩阵。如果是标准采样, $M =$ 原始采样序列长度 $/r$; 如果是过采样 (例如重复信号采样), $M =$ 原始采样序列长度。设 $f(x) \in L^2(R)$, 经预滤波后得到初始序列 c_0 ; 设 c_J 和 d_J 分别是某一 J 层多小波分解的低通和高通部分, 则有分解公式:

$$c_J = \prod_{j=1}^J P^j c_0, \quad d_J = Q^J \prod_{j=1}^{J-1} P^j c_0 \quad (4)$$

相应的重构公式为

$$\tilde{c}_{J-1} = (P^{J-1})^T \tilde{c}_J + (Q^{J-1})^T d_J \quad (5)$$

其中 $\tilde{c}_J = c_J$; 重构所得的 $\tilde{c}_0$ 还要经后滤波才能得到原始信号的重构 $\tilde{f}$ 。

3 一维信号自适应预滤波器的改进

考虑时间不变的一维信号 $f(x)$, 采样 rM 个点后得到 $y_i = f(x_i), (i = 1, \dots, rM; rM$ 为 2 的某一次方); 从文献 [6] 中可以看出, 长度为 1 和长度为 2 的预滤波器的效果都非常好, 两者没有多大的区别。为了减少计算, 便于推广到图像处理, 这里仅考虑长度为 1 的预滤波器 $h = (a, b)^T$; 显然为了实现精确重构, 后滤波器 $\tilde{h} = (1/a, 1/b)^T$ 。由前面的分析我们有

$$c_0 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & y_3 & 0 & \cdots & y_{M-1} & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & y_4 & \cdots & 0 & y_M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \equiv Yh \quad (6)$$

由于多小波的不平衡性, 小波分解后, 大量“细节”部分的系数不为零, 不利于信号去噪或压缩。因此可使高通部分的能量达到最小, 从而确定预滤波系数 a, b 。

取目标函数 $e(h) = d_1^T d_1 = c_0^T (Q^1)^T Q^1 c_0 = h^T Y^T (Q^1)^T Q^1 Y h \equiv h^T K h$, $e(h)$ 是一层多小波分解后高通部分的能量, 考虑 $e(h)$ 的最小化; 虽然该最小化不是基于全局能量来考虑的, 但经一层分解后的信号无须再作预滤波 (实验也证实了此时的预滤波器几乎是 I_2 , 见例 1), 因此 $e(h)$ 的最小化完全考虑了多滤波器组 $\{H, G\}$ 的滤波特性, 同时又考虑了原信号的特点。所以求出的预滤波器可以认为是接近最优的。

为了使量化重构噪声减到最小, 考虑如下约束条件: $|\det(\text{diag}(a, b))| = 1$ 。该条件等价于 $h^T \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} h \equiv h^T L h = 1$ (即 $ab = 1$)。问题就归结为下列的最优化问题

$$\begin{cases} \min e(h) = h^T K h \\ \text{s.t. } h^T L h = 1 \end{cases}$$

作 Lagrange 函数 $A(h, \lambda) = e(h) + \lambda(1 - h^T L h) = h^T (K - \lambda L) h + \lambda$, 求导得 $\nabla_h \cdot A = 2(K - \lambda L)h = 0$, 则有 $Kh = \lambda Lh$, 即 h 是 K 和 L 的广义特征向量, 而特征值 $\lambda = \lambda h^T L h = h^T K h = e(h)$ 。于是我们可以通过取 K 和 L 的最小的正广义特征值 λ , 求出特征向量 h , 利用约束条件, 最终得到预滤波器。

图 1 给出了一维信号的预滤波处理和多小波分解的过程。

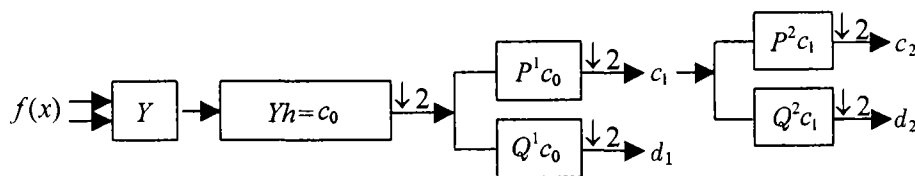


图 1 一维信号的预滤波处理和分解

实际处理中并不需要对信号作扩展, (6) 式等价于

$$c_0(n) = \begin{cases} ay_n, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ by_n, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \text{其中 } n = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

例 1 取 $f(x)$ 为 Lenna 图像的第 100 行, 用文献 [6] 的方法求得 $h = (1.1860, 0.8432)^T$, 时间花费 $t \approx 5s$; 而用本文的方法求得 $h = (1.1574, 0.8640)^T$, 时间花费 $t \approx 0.4s$ 。图 2 给出了用这两种方法对原信号分解、阈值处理、压缩, 再重构后的结果, 两种方法的重构误差都很小。

若对一层小波分解后的低通信号 c_1 作预滤波, 求得 $h = (1.0002, 0.9998)^T$; 这也证实了前面的结论是正确的, 即只需要对第一层小波分解的输入信号作预滤波处理。

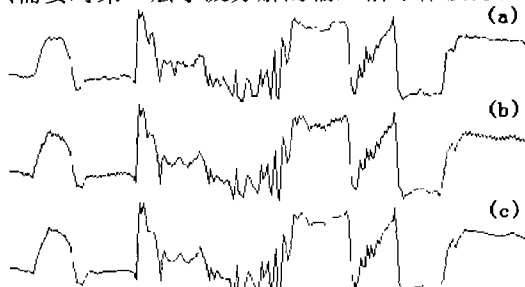


图 2 原始图像及两种方法的重构图像 (硬阈值处理后小波系数有 76% 的零元)

(a) 原始信号; (b) 文献 [6] 的预滤波重构信号; (c) 本文预滤波重构信号;

4 推广到二维图像自适应预滤波

图像是一个有机的整体,各像素点之间有很强的相关性。然而若作成二维向量来处理,其计算量就太大,无法实现实时处理。所以我们先将图像 X 看成由一维列向量组成的信号,对每一列向量可求出对应的列预滤波器 h (这仅仅是考虑了像素点间列的相关性);然后将 X 看成由一维行向量组成的信号,再对每一行向量可求出对应的行预滤波器 g 。具体算法如下:令图像 $X = (x_{ij})_{n \times n}$,

第 1 步 将 X 看成由列向量组成的矩阵 $X = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, 其中 $f_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 可求出对应的预滤波器 h_j , 组成列预滤波器 $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)_{r \times n}$ 。定义 f_j 和 f_{j+1} 的误差: $E(f_j, f_{j+1}) \equiv \max_{1 \leq k \leq n} |x_{k,j} - x_{k,j+1}|$, 为了减少计算量, 当 $E(f_j, f_{j+1}) < T$ 时, 取 $h_{j+1} = h_j$ ($j = 1, \dots, n-1$); T 的取值可根据需要设定, 一般取为 10 左右。

第 2 步 将 X 看成由行向量组成的矩阵, $X = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$, 其中 $l_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 可求出对应的预滤波器 g_i , 组成行预滤波器 $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)_{r \times n}$ 。同样也可以设定 T 来减少计算量。

第 3 步 作列预滤波 $Y = X \bullet h$ ($\bullet$ 表示将 X 的每一列按 (7) 式与 h 对应的元素作用)。

第 4 步 作行预滤波 $Y = Y^T \bullet g$, $C_0 = Y^T$ 。

第 5 步 作 J 层小波分解如下: 低通 $C_j = P^j C_{j-1} (P^j)^T$; 水平高通 $D_j^H = P^j C_{j-1} (Q^j)^T$; 垂直高通 $D_j^V = Q^j C_{j-1} (P^j)^T$; 对角线高通 $D_j^D = Q^j C_{j-1} (Q^j)^T$, $j = 1, 2, \dots, J$ 。

第 6 步 对小波分解系数量化后, 利用阈值去除高通部分的较小元; 然后分别对低通和一系列高通采用不同的编码方案。

第 7 步 经反量化后重构令 $\tilde{C}_J = C_J$, 有

$$\tilde{C}_{J-1} = (P^{j-1})^T \tilde{C}_J P^{j-1} + (P^{j-1})^T D_j^H Q^{j-1} + (Q^{j-1})^T D_j^V P^{j-1} + (Q^{j-1})^T D_j^D Q^{j-1}$$

其中 $j = J, J-1, \dots, 1$ 。

第 8 步 对最后恢复的图像 $\tilde{C}_0$ 进行行列的后滤波。



图 3 Lenra 恢复图像
(PSNR=30dB, 压缩比=64:1)

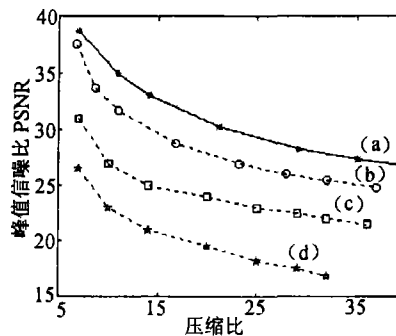


图 4 四种预滤波器比较
(a) 自适应图像预滤波 (b) 文献 [7] 的插值双正交预滤波
(c) 等值预滤波 (d) 文献 [4] 的 XIA 预滤波

例 2 对 Lenna 图像用 GHM 多小波按上面的步骤作预滤波和分解重构 (恢复图像见图 3, 实际计算中用了对称延拓)。由于没有作编码, 我们按文献 [6] 的方法估计压缩比, 计算出

了压缩比与峰值信噪比 PSNR 之间的关系, 并与等值预滤波和文献 [4] 的 XIA 预滤波作了比较 (见图 4), 可见本文的方法明显优于现有的其它预滤波器。

参 考 文 献

- [1] C. K. Chui, J. A. Lian, A study of orthonormal multi-wavelets, Appl. Numer. Math., 1996, 20(3), 273-298.
- [2] J. S. Geronimo, D. P. Hardin, P. R. Massopust, Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, J. Approx. Theory, 1994, 78(3), 373-401.
- [3] Q. Jiang, On the design of multifilter banks and orthonormal multiwavelet bases, IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, SP-46(12), 3292-3302.
- [4] X. G. Xia, J. S. Geronimo, D. P. Hardin, B. W. Suter, Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms, IEEE Trans. on Signal Processing, 1996, SP-44(1), 25-35.
- [5] J. Lebrun, M. Vetterli, Balanced multiwavelets theory and design, IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, SP-46(4), 1119-1125.
- [6] J. T. Miller, C. C. Li, Adaptive multiwavelet initialization, IEEE Trans. on Signal Processing, 1998, SP-46(12), 3282-3291.
- [7] V. Strela, P. Heller, G. Strang, P. Topiwala, C. Heil, The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing, IEEE Trans. on Image Processing, 1999, IP-8(5), 548-563.

ADAPTIVE PREFILTER FOR MULTIWAVELET IMAGE TRANSFORM

Wang Ling Wang Weiwei Song Guoxiang

(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract A simple and efficient method to design adaptive prefilters based on minimizing the high pass energy of the signal multiwavelet decomposition is presented in this paper. This method can be generalized to 2-dimensional images by processing rows and columns respectively. In this way adaptive prefiltering can be performed for images so that the reconstructed image quality is greatly improved. The experimental result shows that the adaptive prefilter given in this paper is superior to the other prefilters available.

Key words Multiwavelet, Adaptive prefilter, Image compression

王 玲: 女, 1966 年生, 博士生, 副教授, 研究方向为多小波理论、信号和图像处理以及数据结构和计算机模式识别。
王卫卫: 女, 1970 年生, 博士生, 研究方向为小波理论、图像处理、数字水印及计算机图形学。
宋国乡: 女, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为小波理论及其在电子工程中的应用、数学建模、算法及应用研究。