

MLC 混沌电路耦合同步的充分条件¹

王锁萍 蒋国平

(南京邮电学院电子工程系 南京 210003)

摘要 基于混合混沌信号的单向耦合方法, 研究 MLC (Murali-Lakshmanan-Chua) 电路混沌同步问题; 利用 Bellman-Gronwall 不等式, 分析并给出 MLC 混沌电路耦合同步的一个充分条件.

关键词 混沌同步, MLC 电路, Bellman-Gronwall 不等式

中图分类号 TN911

1 引言

由于混沌信号的随机似噪声、连续宽频谱和对初值的极端敏感等特点, 特别适用于保密通信、扩频通信等领域, 因而掀起了一股混沌保密通信和扩频通信的研究热潮^[1-5]。混沌同步是混沌保密通信和扩频通信中的一个关键技术, 是混沌保密通信和扩频通信实用化的一个重要环节。1990 年, 美国海军实验室专家 Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步概念及其驱动-响应方法^[1,2], 他们将系统分成两个子系统, 即驱动子系统 (D 系统) 和响应子系统 (R 系统), 然后对响应子系统进行复制, 并用驱动子系统产生的信号驱动该复制的系统。文献 [5-9] 利用线性耦合方法使得两个蔡氏混沌电路同步。上述方法只利用一个混沌信号作为驱动信号。为了增加驱动信号的复杂性, 从而进一步提高混沌保密通信系统的保密性能, 许多学者考虑用多个混沌信号的组合代替单个混沌信号作为驱动信号, 以增加驱动信号的复杂性。文献 [10] 利用多个混沌信号的组合作为驱动信号, 研究混沌同步问题, 并利用线性系统稳定性定理分析混沌同步的条件。

本文基于混合混沌信号的单向耦合方法, 研究混沌同步问题, 利用微分方程中的 Bellman-Gronwall 不等式, 给出 MLC 电路混沌同步的充分条件。具体安排如下: 第 2 节介绍利用混合信号进行单向耦合的同步方法, 并应用到 MLC 电路中; 第 3 节利用 Bellman-Gronwall 不等式, 分析 MLC 电路混沌同步的条件; 第 4 节给出仿真例子; 最后是结论。

2 MLC 电路混沌同步的单向耦合方法

考虑如下混沌系统

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (1)$$

利用单向耦合方法^[5-9], 设计其同步系统如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}' &= f(x', y') + \delta(D \cdot [x \ y]^T - D \cdot [x' \ y']^T) \\ \dot{y}' &= g(x', y') \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $D \in R^{2 \times 1}$ 为耦合矩阵, δ 为耦合参数。与文献 [5-9] 不同的是, 这里的耦合变量为所有混沌信号的线性组合 ($D[x \ y]^T$), 而不是单个混沌信号 (x 或 y)。如果 (2) 式的 Lyapunov 指数全小于零, 则响应系统 (2) 式与驱动系统 (1) 式同步。

下面我们以 MLC 电路为例, 利用上述方法设计其同步系统。

MLC 电路是一种简单的非自治混沌电路^[10-13], 其电路方程描述如下:

¹ 1999-08-24 收到, 2000-02-11 定稿

信息产业部 (原邮电部) 重点科技发展基金项目 (项目编号 98042)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - g(x) \\ \dot{y} &= -\sigma y - \beta x + F \sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\sigma, \beta, F, \omega > 0$, $\delta > 0$ 为耦合参数, $g(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+E| - |x-E|)$, $E > 0$, $a < b < 0$.

令 $D = [1 \ -2]$, 则由 (2) 式可得 (3) 式的响应系统为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}' &= y' - g(x') + \delta[(x - 2y) - (x' - 2y')] \\ \dot{y}' &= -\sigma y' - \beta x' + F \sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由 (3) 式减去 (4) 式得误差系统为

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= q - (g(x) - g(x')) - \delta(p - 2q) \\ \dot{q} &= -\sigma q - \beta p \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $p = x - x'$, $q = y - y'$.

由于 $g(x)$ 为分段线性连续函数, 斜率分别为 a 和 b , 因此

$$a(x - x') \leq g(x) - g(x') \leq b(x - x') \quad (6)$$

由 (6) 式, 可设

$$g(x) - g(x') = k(x - x') \quad (7)$$

其中 k 为时变系数, 且 $a \leq k \leq b < 0$. (5) 式变为下列变参数线性系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k - \delta & 1 + 2\delta \\ -\beta & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (8)$$

因此, 只要选择合适的参数 δ , 使得 (8) 式渐进稳定, 则 $p \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$, 即 (4) 式与 (3) 式同步.

3 MLC 混沌电路耦合同步条件

从上可知, 误差系统 (8) 式是一个变参数的线性系统, 即时变线性系统, 即使误差系统矩阵 $\begin{bmatrix} -k - \delta & 1 + 2\delta \\ -\beta & -\sigma \end{bmatrix}$ 的所有特征根实部皆小于零, 误差系统 (8) 式也不一定稳定, 或者说无法判断其稳定性. 因此文献 [7, 8, 10] 利用线性系统稳定性的有关结论得到的同步条件是存在问题的. 为了解决这个问题, 我们利用微分方程中的 Bellman-Gronwall 不等式研究误差系统 (8) 式的稳定性, 给出 MLC 电路混沌同步的充分条件.

考虑如下混沌系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + u(t) \quad (9)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$ 为常数矩阵, $x \in R^n$ 为系统状态向量, $Ax(t)$ 为线性部分, $f(x(t))$ 为非线性部分, $u(t) \in R^n$ 为系统的外部输入向量. (9) 式的同步系统为

$$\dot{x}'(t) = Ax'(t) + f(x'(t)) + u(t) + K(x(t) - x'(t)) \quad (10)$$

定理 1 设系统 (9) 式中 $f(x(t))$ 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$, 对任意的 $x(t), x'(t) \in R^n$, 有 $\|f(x(t)) - f(x'(t))\| \leq L\|x(t) - x'(t)\|$. 如果 $\lambda(A - K) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda) < -L - 1\}$, 则 (9) 式和 (10) 式所示的系统同步. 这里, $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵的特征值.

证明 由 (9) 式和 (10) 式得到误差方程

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + f(x(t)) - f(x'(t)) - Ke(t) \quad (11)$$

由常微分方程解的常数变易公式可知, (11) 式的解满足下列积分方程:

$$e(t) = \exp[(A - K)(t - t_0)]e(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[(A - K)(t - \tau)][f(x(\tau)) - f(x'(\tau))]d\tau \quad (12)$$

由 (12) 式可得, 存在 $t_1 \geq t_0$, 当 $t \geq t_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \exp[-(L + 1)(t - t_0)]\|e(t_0)\| + \int_{t_0}^t \exp[-(L + 1)(t - \tau)]\|f(x(\tau)) - f(x'(\tau))\|d\tau \\ &\leq \exp[-(L + 1)(t - t_0)]\|e(t_0)\| + \int_{t_0}^t \exp[-(L + 1)(t - \tau)]L\|e(\tau)\|d\tau \\ &= \exp[-(L + 1)t] \cdot \exp[(L + 1)t_0]\|e(t_0)\| + L \exp[-(L + 1)t] \int_{t_0}^t \exp[(L + 1)\tau]\|e(\tau)\|d\tau \\ &= \exp[-(L + 1)t]e_0 + L \exp[-(L + 1)t] \int_{t_0}^t \exp[(L + 1)\tau]\|e(\tau)\|d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $e_0 = \exp[(L + 1)t_0]\|e(t_0)\|$.

(13) 式两边乘以 $\exp[(L + 1)t]$ 得

$$\exp[(L + 1)t]\|e(t)\| \leq e_0 + L \int_{t_0}^t \exp[(L + 1)\tau]\|e(\tau)\|d\tau \quad (14)$$

令 $y(t) = \exp[(L + 1)t]\|e(t)\|$, 则

$$y(t) \leq e_0 + L \int_{t_0}^t y(\tau)d\tau \quad (15)$$

由 Bellman-Gronwall 不等式, 得

$$y(t) \leq e_0 \exp[L(t - t_0)] \quad (16)$$

则

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &= \exp[-(L + 1)t]y(t) \\ &\leq \exp[-(L + 1)t]e_0 \exp[L(t - t_0)] \\ &= \exp(-t - Lt_0)e_0 \end{aligned} \quad (17)$$

因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x'(t)\| = 0$.

证毕

令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\sigma \end{bmatrix}$, $K = \delta \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = \begin{bmatrix} -g(x) \\ 0 \end{bmatrix}$, $u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F \sin(\omega t) \end{bmatrix}$, 则 (3) 式就化为 (9) 式的形式, (4) 式就化为 (10) 式的形式. 由 (6) 式和 (7) 式可知 $\|f(x) - f(x')\| \leq (-a) \cdot \|x - x'\|$. 利用上述定理很容易得到以下结论.

推论 1 如果条件 $\lambda(A - K) \subset \{\lambda : \text{Re}(\lambda) < a - 1\}$ 成立, 则 (5) 或 (8) 式稳定, 即两个系统 (3) 式和 (4) 式同步.

定理 2 如果 $\begin{cases} 2(a - 1) + \delta + \sigma > 0 \\ (a - 1)^2 + (\delta + \sigma)(a - 1) + \delta(\sigma + 2\beta) + \beta > 0 \end{cases}$, 则 $\lambda(A - K) \subset \{\lambda : \text{Re}(\lambda) < a - 1\}$.

证明 矩阵 $(A - K)$ 的特征方程为

$$s^2 + (\delta + \sigma)s + \delta\sigma + 2\delta\beta + \beta = 0 \tag{18}$$

为了使得矩阵 $(A - K)$ 的特征根实部均小于 $(a - 1)$, 可令 $s = s_1 + a - 1$ 代入原特征方程 (18) 式, 得到如下 s_1 特征方程:

$$s_1^2 + (2(a - 1) + \delta + \sigma)s_1 + (a - 1)^2 + (\delta + \sigma)(a - 1) + \delta\sigma + 2\delta\beta + \beta = 0 \tag{19}$$

根据线性系统稳定性的 Routh 判据, 可知

如果 $\begin{cases} 2(a - 1) + \delta + \sigma > 0 \\ (a - 1)^2 + (\delta + \sigma)(a - 1) + \delta(\sigma + 2\beta) + \beta > 0 \end{cases}$, 则 $\lambda(A - K) \subset \{\lambda : \text{Re}(\lambda) < a - 1\}$. 证毕

由推论 1 和定理 2 可得如下结论

推论 2 如果 $\begin{cases} 2(a - 1) + \delta + \sigma > 0 \\ (a - 1)^2 + (\delta + \sigma)(a - 1) + \delta(\sigma + 2\beta) + \beta > 0 \end{cases}$, 则 (5) 或 (8) 式稳定, 即两个系统 (3) 和 (4) 式同步.

4 仿真示例

选 MLC 电路参数为 $\sigma = 1.015$, $\beta = 1.0$, $F = 0.15$, $\omega = 0.75$, $a = -1.02$, $b = -0.55$, 耦合参数为 $\delta = 3.5$. 由于 $\begin{cases} 2(a - 1) + \delta + \sigma > 0 \\ (a - 1)^2 + (\delta + \sigma)(a - 1) + \delta(\sigma + 2\beta) + \beta > 0 \end{cases}$, 由推论 2 可知, (3),(4) 式所示的两个 MLC 电路同步. 仿真结果如图 1 和图 2 所示. 其中, 图 1 为 MLC 电路混沌吸引子和混沌信号; 图 2 为同步信号的李萨育图形和同步信号的误差曲线, 李萨育图形中间出现分支是由于驱动系统和响应系统的初始状态不同而引起, 随着系统进入同步状态, 这种分支随之消失.

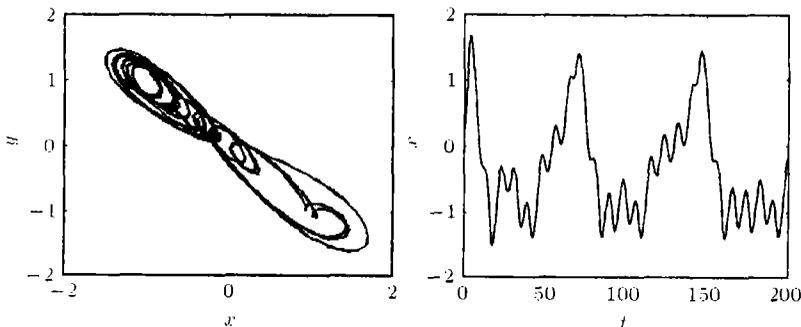


图 1 MLC 电路混沌吸引子和混沌信号

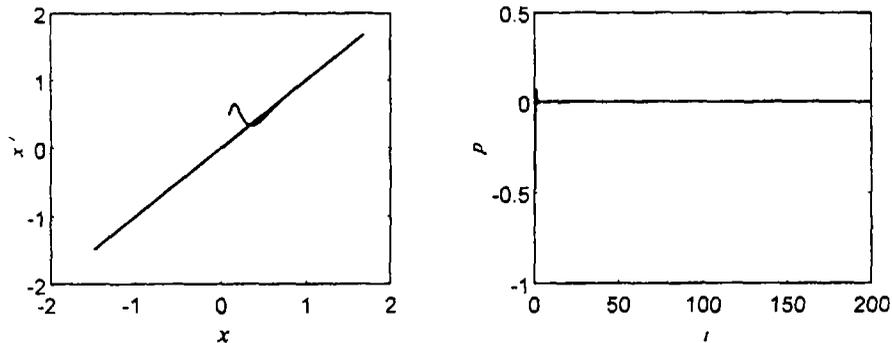


图 2 同步信号的李萨育图形和误差曲线

5 结 论

本文利用单向耦合方法研究了 MLC 电路的混沌同步问题, 利用微分方程中的 Bellman-Gronwall 不等式, 给出了 MLC 电路混沌同步的一个充分条件. 该方法简单实用, 便于在保密通信和扩频通信中应用.

参 考 文 献

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Synchronization in chaotic circuits. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64(8), 821-824.
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carroll, Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*, 1991, 44(4), 2374-2383.
- [3] S. Hays, C. Grebogi, E. Ott, Communicating with chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 70(20), 3031-3034.
- [4] C. W. Wu, L. O. Chua, A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1993, 3(6), 1619-1627.
- [5] M. J. Ogorzalek, Taming chaos-Part 1: Synchronization. *IEEE Trans. on Circuits & Systems*, 1993, 40(10), 693-699.
- [6] C. W. Wu, L. O. Chua, Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans. on Circuits & Systems*, 1995, 42(8), 430-447.
- [7] 钟国群, 蔡氏电路混沌保密通讯, *电路与系统学报*, 1996, 1(1), 19-29.
- [8] L. O. Chua, M. Itoh, L. Kocarev, K. Eckert, Chaos synchronization in Chua's circuits. *J. of Circuits, Systems and Computers*, 1993, 3(1), 93-108.
- [9] T. Kapitaniak, M. Sckieta, Ogorzalek, Monotone synchronization of chaos. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1996, 6(1), 211-217.
- [10] K. Murali, M. Lakshmanan, Synchronization through compound chaotic signal in Chua's circuit and Murali-Lakshmanan-Chua circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1997, 7(2), 415-421.
- [11] K. Murali, M. Lakshmanan, L. O. Chua, The simplest dissipative non-autonomous chaotic circuit. *IEEE Trans. on Circuits & Systems I*, 1994, 41(6), 462-463.
- [12] K. Murali, M. Lakshmanan, L. O. Chua, Bifurcation and chaos in the simplest dissipative non-autonomous circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1994, 4(6), 1511-1524.

- [13] K. Murali, M. Lakshmanan, L. O. Chua, Controlling and synchronization of chaos in the simplest dissipative non-autonomous circuit, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1995, 5(3), 563-571.

SUFFICIENT CONDITION OF CHAOS SYNCHRONIZATION VIA COUPLING APPROACH IN MLC CIRCUIT

Wang Suoping Jiang Guoping

(*Dept. of Electron. Eng., Nanjing Univ. of Posts and Telecomm., Nanjing 210003, China*)

Abstract Based on unidirectionally coupling method, the synchronization through compound chaotic signal is studied. This method of synchronization is applied to Murali-Lakshmanan-Chua circuit, and a sufficient condition for synchronization in MLC circuit via Bellman-Gronwall inequality is given.

Key words Chaos synchronization, MLC circuit, Bellman-Gronwall inequality

王锁萍: 男, 1946年生, 硕士, 教授, 系主任. 现从事通信与电子系统、信息与信号处理、计算机应用等研究工作.

蒋国平: 男, 1966年生, 博士, 副教授, 系副主任. 现从事线性系统、非线性系统、混沌系统及其在通信中的应用等研究工作.