

复循环平稳的非平稳信号的非参数谱估计¹

毛用才 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 复准循环平稳信号为具有准周期时变统计特性的复随机信号, 它对研究信息系统中的一些非高斯过程有重要意义。本文提出了平滑周期图作为离散时间复循环平稳过程的循环谱估计, 并从理论上证明了该估计为相容估计, 还导出了其渐近协方差表达式。

关键词 非平稳谱分析, 复循环平稳序列, 非参数循环谱估计, 相容性, 渐近协方差

中图分类号 TN911.7

1 引 言

近年来, 实值数据的高阶谱分析研究空前活跃, 而且得到了许多方面的应用, 例如 ARMA 建模, 双线性模型分析, 检测相位耦合, 信号重建以及图象处理等^[1-4]。这些应用主要限于实值信号。然而对于复值信号的谱分析技术的建立尚未得到人们重视, 可是复信号谱处理在一些领域是非常有用的, 不少信息系统, 如雷达、通信、声纳信号处理就是例证。

Dandawate 与 Giannakis 在文献 [1] 中系统地研究了离散时间实值准循环平稳的非平稳过程非参数谱估计问题。本文旨在研究离散时间复值准循环平稳的非平稳过程的非参数谱估计问题。正如 Brillinger 和 Rosenblatt 在文献 [3] 中指出的那样, 对于复信号, 由于在累积量中复共轭的位置不同而有不同的累积量, 人们通常是根据问题的需要选择相应的累积量。本文将各种定义作了统一的定义, 它包括了所有的类型。我们首先定义了复准循环平稳过程的累积量和谱, 然后提出了相应的二阶谱的估计量, 并探讨了它们的渐近性质。

2 定义和性质

设 $x(t)$ 为一离散时间非平稳的复过程, 其矩按取共轭的不同而有差异, 为使之具有一般性, 这里定义为 $m_{kx}^{\epsilon}(t; \tau_1 \cdots \tau_{k-1}) \equiv E\{x^{\epsilon_0}(t)x^{\epsilon_1}(t+\tau_1)\cdots x^{\epsilon_{k-1}}(t+\tau_{k-1})\}$, 其中 $\epsilon \equiv (\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{k-1})$, $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$, 而 $x^{+1}(t) = x(t)$, $x^{-1}(t) = x^*(t)$ 。若 $x(t)$ 为一零均值的复过程, 则二阶累积量 $c_{2x}^{\epsilon}(t; \tau) = m_{2x}^{\epsilon}(t; \tau)$, 因此只须讨论二阶累积量即可。定义

$$c_{2x}(t; \tau) \equiv c_{2x}^{(-1,1)}(t; \tau), \quad c_{2x}^1(t; \tau) \equiv c_{2x}^{(1,1)}(t; \tau), \quad (1)$$

则复过程的按取共轭不同而定义的四种二阶累积量可由 $c_{2x}(t; \tau)$ 和 $c_{2x}^1(t; \tau)$ 确定。对零均值的复过程的四阶累积量, 有

$$\begin{aligned} c_{4x}^{\epsilon}(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) &\equiv \text{cum}\{x^{\epsilon_0}(t), x^{\epsilon_1}(t+\tau_1), x^{\epsilon_2}(t+\tau_2), x^{\epsilon_3}(t+\tau_3)\} \\ &= m_{4x}^{\epsilon}(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) - m_{2x}^{(\epsilon_0, \epsilon_1)}(t; \tau_1) m_{2x}^{(\epsilon_2, \epsilon_3)}(t+\tau_2; \tau_3-\tau_2) - m_{2x}^{(\epsilon_0, \epsilon_2)}(t; \tau_2) \\ &\quad \times m_{2x}^{(\epsilon_1, \epsilon_3)}(t+\tau_2; \tau_3-\tau_1) - m_{2x}^{(\epsilon_0, \epsilon_3)}(t; \tau_3) m_{2x}^{(\epsilon_1, \epsilon_2)}(t+\tau_1; \tau_2-\tau_1). \end{aligned} \quad (2)$$

¹ 1994-12-13 收到, 1995-10-24 定稿

复过程 $x(t)$ 称为准循环平稳的, 如果它的一阶和二阶 (假定存在) 累积量为关于时间 t 的准周期函数^[1], 复循环平稳过程二阶矩关于 t 也是准周期函数。

定义 1 对于固定的 τ , 若 $c_{2x}(t; \tau)$ 和 $c_{2x}^1(t; \tau)$ 可表为关于 t 的 Fourier 级数,

$$c_{2x}(t; \tau) = \sum_{\alpha \in \chi_2} C_{2x}(\alpha; \tau) e^{j\alpha t}, \quad C_{2x}(\alpha; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} c_{2x}(t; \tau) e^{-j\alpha t}; \quad (3)$$

$$c_{2x}^1(t; \tau) = \sum_{\alpha \in \chi_2^1} C_{2x}^1(\alpha; \tau) e^{j\alpha t}, \quad C_{2x}^1(\alpha; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} c_{2x}^1(t; \tau) e^{-j\alpha t}; \quad (4)$$

$$\chi_2 = \{\alpha : C_{2x}(\alpha; \tau) \neq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi\}, \quad \chi_2^1 = \{\alpha : C_{2x}^1(\alpha; \tau) \neq 0, 0 \leq \alpha < 2\pi\};$$

则 Fourier 系数 $C_{2x}(\alpha; \tau)$ 和 $C_{2x}^1(\alpha; \tau)$ 称为 $x(t)$ 在循环频率 α 处的二阶循环累积量。准周期累积量的循环频率集 χ_2 与 χ_2^1 是可数集。

假定 $C_{2x}(t; \tau)$ 和 $C_{2x}^1(t; \tau)$ 对每一 t 关于 τ 绝对可和, 定义时变谱和循环谱如下:

定义 2 复循环平稳过程 $x(t)$ 的时变累积量谱和循环累积量谱分别定义为

$$S_{2x}(t; \omega) \equiv \sum_{\tau} c_{2x}(t; \tau) e^{-j\omega\tau} \quad \text{和} \quad H_{2x}(\alpha; \omega) \equiv \sum_{\tau} C_{2x}(\alpha; \tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (5)$$

利用定义 1 和 2, 可以证明:

$$S_{2x}(t; \omega) = \sum_{\alpha \in \chi_2} H_{2x}(\alpha; \omega) e^{j\alpha t}, \quad H_{2x}(\alpha; \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} S_{2x}(t; \omega) e^{-j\alpha t}. \quad (6)$$

3 几个预备性结果

本节证明后面要用到的几个结果, 它们为平稳过程相应结果的推广。先作如下假设:

假设 1 对任意 t , 有 $\sum_{\tau} |\tau| |c_{2x}(t; \tau)| < \infty$ 和 $\sum_{\tau} |\tau| |c_{2x}^1(t; \tau)| < \infty$ 。

假设 2 对任意 α , 有 $\sum_{\tau} |\tau| |C_{2x}(\alpha; \tau)| < \infty$ 与 $\sum_{\tau} |\tau| |C_{2x}^1(\alpha; \tau)| < \infty$ 。

这两个假设为证明有关相容性的混合条件, 它们反映了 $x(t)$ 的时变谱和循环谱的“平滑”程度。下面的引理说明这些假设可以用来刻画谱的收敛速度。

引理 1 若假设 2 成立, 则有

$$|H_{2x}(\alpha; \omega) - \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} C_{2x}(\alpha; \tau) e^{-j\omega\tau}| = O(T^{-1}), \quad (7)$$

$$|H_{2x}^1(\alpha; \omega) - \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} C_{2x}^1(\alpha; \tau) e^{-j\omega\tau}| = O(T^{-1}). \quad (8)$$

证明 将 (5) 式中的 H_{2x} 代入 (7) 式的左边, 并利用假设 2 得

$$|H_{2x}(\alpha; \omega) - \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} C_{2x}(\alpha; \tau) e^{-j\omega\tau}| \leq \sum_{|\tau| > T} |C_{2x}(\alpha; \tau)| \leq \sum_{|\tau| > T} \frac{|\tau|}{T} |C_{2x}(\alpha; \tau)| = O(T^{-1}).$$

类似于引理 1, 有

引理 2 若假设 1 成立, 则有

$$|S_{2x}(t; \omega) - \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} c_{2x}(t; \tau) e^{-j\omega\tau}| = O(T^{-1}), \quad (9)$$

$$|S_{2x}^1(t; \omega) - \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} c_{2x}^1(t; \tau) e^{-j\omega\tau}| = O(T^{-1}). \quad (10)$$

下一引理是关于有限 Fourier 变换之累积量的一个很有用的结果。

引理 3 设 $X_T(\omega) \equiv \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-j\omega t}$, 若假设 1 成立, 则有

$$\text{cum}\{X_T^{\varepsilon_0}(\omega_0), X_T^{\varepsilon_1}(\omega_1)\} = \sum_{t=0}^{T-1} S_{2x}^{(\varepsilon_0, \varepsilon_1)}(t; \varepsilon_0 \varepsilon_1 \omega_1) e^{-j(\varepsilon_0 \omega_0 + \varepsilon_1 \omega_1)t} + O(1). \quad (11)$$

证明 由累积量的双线性性, 并作变量替换: $t = t_0$, $\tau = t_1 - t_0$, 且令 $\lambda \equiv \varepsilon_0 \omega_0 + \varepsilon_1 \omega_1$, $t_\alpha \equiv -\min(\tau, 0)$ 和 $t_\beta \equiv 1 - \max(\tau, 0)$, 可得

$$\begin{aligned} \text{cum}\{X_T^{\varepsilon_0}(\omega_0), X_T^{\varepsilon_1}(\omega_1)\} &= \sum_{t_0=0}^{T-1} \sum_{t_1=0}^{T-1} e^{-j(\varepsilon_0 \omega_0 t_0 + \varepsilon_1 \omega_1 t_1)} \text{cum}\{x^{\varepsilon_0}(t_0), x^{\varepsilon_1}(t_1)\} \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j\lambda t} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} e^{-j\varepsilon_1 \omega_1 \tau} c_{2x}^{(\varepsilon_0, \varepsilon_1)}(t; \tau) \\ &\quad - \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} R_\tau \cdot e^{-j\varepsilon_1 \omega_1 \tau} c_{2x}^{(\varepsilon_0, \varepsilon_1)}(0; \tau), \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $R_\tau \equiv \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j(\lambda-\alpha)t} - \sum_{t=t_\alpha}^{t_\beta} e^{-j(\lambda-\alpha)t}$ 以常数 $|\tau|$ 为上界, 因而由假设 1 知 (12) 式的第 2 项 $\leq \sum_\tau (|\tau| |c_{2x}(0; \tau)|) = O(1)$, 故 (12) 式可化为

$$\text{cum}\{X_T^{\varepsilon_0}(\omega_0), X_T^{\varepsilon_1}(\omega_1)\} = \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j\lambda t} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} e^{-j\varepsilon_1 \omega_1 \tau} \cdot c_{2x}^{(\varepsilon_0, \varepsilon_1)}(t; \tau) + O(1).$$

由此根据引理 2 即可得到 (11) 式。类似于引理 3, 有

引理 4 设 $X_T(\omega) \equiv \sum_{t=0}^{T-1} x(t) e^{-j\omega t}$, 若对任意 t , 有 $\sum_{\tau} |\tau_i| |c_{4x}(t; \tau)| < \infty$, $i=1, 2, 3$, 则

$$\text{cum}\{X_T^{\varepsilon_0}(\omega_0), \dots, X_T^{\varepsilon_3}(\omega_3)\} = \sum_{t=0}^{T-1} S_{4x}^\varepsilon(t; \varepsilon_0 \varepsilon_1 \omega_1, \varepsilon_0 \varepsilon_2 \omega_2, \varepsilon_0 \varepsilon_3 \omega_3) e^{-j(\varepsilon_0 \omega_0 + \dots + \varepsilon_3 \omega_3)t} + O(1). \quad (13)$$

4 二阶复循环平稳过程的谱估计

设 $x(t)$ 为一循环平稳的复过程, 我们如下定义它的二阶循环周期图。

定义 3 设 $X_T(\omega) \equiv \sum_{t=0}^{T-1} x(t)e^{-j\omega t}$ 为复循环平稳过程 $x(t)$ 的有限 Fourier 变换, 则其循环周期图定义为

$$I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega) \equiv \frac{1}{T} X_T(\omega) X_T^*(\omega - \alpha) \quad \text{和} \quad I_{2x}^{1(T)}(\alpha; \omega) \equiv \frac{1}{T} X_T(\omega) X_T(\alpha - \omega). \quad (14)$$

我们的目的是利用循环周期图来建立 $H_{2x}(\alpha; \omega)$ 和 $H_{2x}^1(\alpha; \omega)$ 的估计量, 下一定理给出了循环周期图的渐近性质.

定理 1 设 $x(t)$ 为一零均值的复循环平稳过程, $I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega)$ 为其循环周期图, 若假设 2 成立, 且对任意的 α, ω , $H_{4x}(\alpha; \omega)$ 存在有限, 则有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega) = H_{2x}(\alpha; \omega), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}\{I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega), I_{2x}^{(T)}(\beta; \mu)\} &= H_{2x}(\mu - \omega; \mu) H_{2x}(\beta - \alpha - \mu + \omega; \omega - \alpha) \\ &\quad + [H_{2x}^1(\omega + \mu - \beta; \omega)]^* \cdot H_{2x}^1(\omega + \mu - \alpha; \mu). \end{aligned} \quad (16)$$

证明 由定义 3, 令 $s - t = \tau$ 且记 $t_\alpha = -\min\{\tau, 0\}$ 和 $t_\beta = T - 1 - \max\{\tau, 0\}$, 再由引理 2 可得

$$\begin{aligned} E I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega) &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} E\{x(s)x^*(t)\} e^{-j\omega s} e^{j(\omega - \alpha)t} = \frac{1}{T} \sum_{t=t_\alpha}^{t_\beta} e^{-j\alpha t} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} c_{2x}(t; \tau) e^{-j\omega \tau} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=t_\alpha}^{t_\beta} e^{-j\alpha t} [S_{2x}(t; \omega) + O(T^{-1})] = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} S_{2x}(t; \omega) \cdot e^{-j\alpha t} + O(1). \end{aligned} \quad (17)$$

因而利用定义 2 和 (5) 式即得渐近无偏性. 现转而考虑协方差表达式. 利用 Leonov-Sirjaev 公式将周期图的协方差用累积量表示, 并利用引理 3 和 4 可得

$$\begin{aligned} \text{cov}\{I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega), I_{2x}^{(T)}(\beta; \mu)\} &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j(\beta - \alpha)t} S_{4x}(t; \omega - \alpha, \beta - \mu, \mu) \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j(\mu - \omega)t} S_{2x}(t; \mu) \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j(\beta - \alpha + \omega - \mu)t} \cdot S_{2x}(t; \omega - \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j(\omega + \mu - \beta)t} [S_{2x}^1(t; \omega)]^* \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j(\omega + \mu - \alpha)t} \cdot S_{2x}^1(t; \mu) + O(T^{-1}). \end{aligned} \quad (18)$$

又由于 H_{4x} 存在且有限, 故 (18) 式中的第一项当 $T \rightarrow \infty$ 时趋于 0, 故得到 (16) 式. 证毕

类似于定理 1 的证明, 有

定理 2 设 $x(t)$ 为一零均值的复循环平稳过程, $I_{2x}^{1(T)}(\alpha; \omega)$ 为其循环周期图, 若假设 2 成立, 且对任意的 α, ω , $H_{4x}(\alpha; \omega)$ 存在有限, 则有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E I_{2x}^{1(T)}(\alpha; \omega) = H_{2x}^1(\alpha; \omega), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}\{I_{2x}^{1(T)}(\alpha; \omega), I_{2x}^{1(T)}(\beta; \mu)\} &= H_{2x}(\mu - \omega; \mu) H_{2x}(\beta - \alpha - \mu + \omega; \beta - \mu) \\ &\quad + H_{2x}^1(\beta - \omega - \mu; \beta - \mu) H_{2x}^1(\mu + \alpha - \omega; \mu). \end{aligned} \quad (20)$$

定理 1 和 2 说明, 尽管循环周期图不是循环谱的相容估计, 但却对任一频率都是渐近无偏的估计量。利用循环周期图的定义 (14) 式, 可将 (15), (19) 式化为

$$H_{2x}(\alpha; \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E\{X_T(\omega) X_T^*(\omega - \alpha)\}, \quad H_{2x}^1(\alpha; \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E\{X_T(\omega) X_T(\alpha - \omega)\}. \quad (21)$$

另外, 由 (16) 和 (20) 式, 可得到循环谱估计量的渐近方差表达式

$$\left. \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} D\{I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega)\} &= H_{2x}(0; \omega) \cdot H_{2x}(0; \omega - \alpha) + |H_{2x}^1(2\omega - \alpha; \omega)|^2, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} D\{I_{2x}^{1(T)}(\alpha; \omega)\} &= H_{2x}(0; \omega) \cdot H_{2x}(0; \alpha - \omega) + H_{2x}^1(2\omega - \alpha; \omega) H_{2x}^1(\alpha; \omega). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

循环周期图一般通过加窗来平均。设 W 表示满足下面假设的连续权函数

假设 3 $\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) d\tau = 1$.

假设 4 当 $T \rightarrow \infty$ 时, 有 $B_T \rightarrow 0$, 但 $B_T T \rightarrow \infty$ 。

假设 5 存在 $A, \varepsilon > 0$, 使得 $|W(\tau)| \leq A(1 + |\tau|)^{-(\varepsilon+1)}$, $|\frac{d}{d\tau} W(\tau)| \leq A(1 + |\tau|)^{-(\varepsilon+1)}$ 。

利用权函数 W 可定义谱窗 $W^{(T)}$ 为

$$W^{(T)}(\omega) = 2\pi B_T^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W[B_T^{-1}(\omega + 2\pi l)]. \quad (23)$$

定义 4 循环谱的平滑周期图估计定义为

$$\hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega) \equiv \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{T-1} I_{2x}^{(T)}(\alpha; \frac{2\pi s}{T}) W^{(T)}(\omega - \frac{2\pi s}{T}). \quad (24)$$

定理 3 设 $x(t)$ 为一满足假设 1 和 2 的零均值的复循环平稳过程, $\hat{H}_{2x}^{(T)}$ 为由定义 2 给出的循环谱的平滑周期图估计量, 则有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\{\hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega)\} = H_{2x}(\alpha; \omega), \quad (25)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B_T T \text{cov}\{\hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega), \hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \mu)\} = [\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}\{I_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega), I_{2x}^{(T)}(\alpha; \mu)\}] \varepsilon_W, \quad (26)$$

式中的 $\varepsilon_W \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |W(\tau)|^2 d\tau$ 为窗函数的能量, 而周期图的协方差由定理 1 给出。

证明 由 (14) 式和

$$\hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega) \equiv \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{T-1} S_{2x}(t, \omega) \cdot e^{-j\alpha t} = \sum_{\gamma} H_{2x}(\gamma; \omega) \cdot e^{-j(\alpha - \gamma)t}, \quad (27)$$

并根据假设 5, 对充分大的 T 将和式用积分来近似, 再利用 (23) 式可得

$$\begin{aligned}
E\hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega) &\equiv \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{T-1} E\{I_{2x}^{(T)}(\alpha; \frac{2\pi s}{T})\} \cdot W^{(T)}(\omega - \frac{2\pi s}{T}) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{s=0}^{T-1} W^{(T)}(\omega - \frac{2\pi s}{T}) \cdot H_{2x}^{(T)}(\alpha; \frac{2\pi s}{T}) + o(1) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W^{(T)}(\omega - \lambda) H_{2x}^{(T)}(\alpha; \lambda) d\lambda + o(1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} B_T^{-1} W[B_T^{-1}(\omega - \lambda)] H_{2x}^{(T)}(\alpha; \lambda) d\lambda + o(1). \quad (28)
\end{aligned}$$

又由于 $\lim_{T \rightarrow \infty} H_{2x}^{(T)}(\alpha; \lambda) = H_{2x}(\alpha; \lambda)$, 故利用假设 3 和 4 可知 $B_T^{-1}W(B_T^{-1}u) = \delta(u)$, 故对 (28) 式取极限即得 (25) 式。下面考虑协方差, 由于 H_{4x} 存在有限, 故利用 (18)、(20) 式并略去当 $T \rightarrow \infty$ 时趋于 0 的含有 H_{4x} 的项可得

$$\begin{aligned}
&\text{cov}\{\hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega), \hat{H}_{2x}^{(T)}(\alpha; \mu)\} \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{r,s=0}^{T-1} W^{*(T)}(\omega - \frac{2\pi s}{T}) W^{(T)}(\mu - \frac{2\pi r}{T}) \text{cov}\{I_{2x}^{(T)}(\alpha; \frac{2\pi s}{T}), I_{2x}^{(T)}(\alpha; \frac{2\pi r}{T})\} \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{r,s=0}^{T-1} W^{*(T)}(\omega - \frac{2\pi s}{T}) W^{(T)}(\mu - \frac{2\pi r}{T}) H_{2x}^{(T)}[\frac{2\pi(r-s)}{T}; \frac{2\pi r}{T}] H_{2x}^{(T)}[\frac{2\pi(s-r)}{T}; \frac{2\pi s}{T} - \alpha] \\
&\quad + \frac{1}{T^2} \sum_{r,s=0}^{T-1} W^{*(T)}(\omega - \frac{2\pi s}{T}) W^{(T)}(\mu - \frac{2\pi r}{T}) \left\{ H_{2x}^{1(T)}\left(\frac{2\pi(r+s)}{T} - \alpha; \frac{2\pi s}{T}\right) \right\} \\
&\quad \times H_{2x}^{1(T)}\left[\alpha - \frac{2\pi(r+s)}{T}; \frac{2\pi r}{T}\right] + O(T^{-1}) \equiv T_1 + T_2 + O(T^{-1}). \quad (29)
\end{aligned}$$

先来考虑 (29) 式中的第一部分 T_1 , 对此用 (27) 式中的第二个等式得

$$T_1 = \sum_{\gamma_0, \gamma_1} \frac{1}{T^2} \sum_{r,s=0}^{T-1} W^{*(T)}(\omega - \frac{2\pi s}{T}) W^{(T)}(\mu - \frac{2\pi r}{T}) H_{2x}(\gamma_0; \frac{2\pi r}{T}) H_{2x}(\gamma_1; \frac{2\pi s}{T} - \alpha) T_1', \quad (30)$$

式中 $T_1' \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j[\frac{2\pi(r-s)}{T} - \gamma_0]t} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-j[\frac{2\pi(r-s)}{T} - \gamma_1]t}$ 。由于 T_1' 除了 $2\pi(r-s)/T = \gamma_0 \pmod{2\pi}$ 和 $2\pi(r-s)/T = \gamma_1 \pmod{2\pi}$ 外收敛于 0, 因而 r, s 中只有一个是自由变量, 从而关于 r, s 的二重求和可化为单个求和, 故将 (30) 式中关于 r, s 的求和用二重积分近似, 再将二重积分化为单

积分可将 T_1 近似为

$$\begin{aligned} T_1 &\approx \sum_{\gamma_0, \gamma_1} \eta(\gamma_0 + \gamma_1) \frac{1}{4\pi^2} \\ &\quad \times \iint_0^{2\pi} W^{*(T)}(\omega - \theta) W^{(T)}(\mu - \xi) H_{2x}(\gamma_0; \xi) H_{2x}(\gamma_1; \theta - \alpha) \eta(\xi - \theta - \gamma_0) d\theta d\xi \\ &\approx \sum_{\gamma_0, \gamma_1} \eta(\gamma_0 + \gamma_1) \frac{1}{2\pi} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) W^{*(T)}(\omega - \mu + \gamma_0 + \tau B_T) H_{2x}(\gamma_0; \mu - \tau B_T) H_{2x}(\gamma_1; \mu - \alpha - \gamma_0 - \tau B_T) d\tau. \end{aligned}$$

由于当 $T \rightarrow \infty$ 时, W 的自变量除了 $\mu - \omega - \gamma_0 - 2\pi l = 0$ 外趋于 ∞ , 故当 $T \rightarrow \infty$ 时有 $W[B_T^{-1}(\mu - \omega - \gamma_0 + \xi B_T - 2\pi l)] \rightarrow W(\xi)\eta(\mu - \omega - \gamma_0)$, 令 $B_T^{-1}[\omega - \mu + \gamma_0 + \tau B_T + 2\pi l] = \xi$, 且乘以因子 B_T 可得

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} B_T T_1 &= \sum_{\gamma_0, \gamma_1} \eta(\gamma_0 + \gamma_1) \eta(\mu - \omega - \gamma_0) H_{2x}(\gamma_0; \omega + \gamma_0) H_{2x}(\gamma_1; \omega - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} W^*(\xi) \cdot W(\xi) d\xi \\ &= H_{2x}(\mu - \omega; \mu) \cdot H_{2x}(\omega - \mu; \omega - \alpha) \cdot \varepsilon_W. \end{aligned} \quad (31)$$

对 T_2 进行类似于 T_1 的化简, 可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} B_T T_2 &= \sum_{\gamma_0, \gamma_1} \eta(\gamma_0 + \gamma_1) \eta(\mu + \omega - \alpha - \gamma_0) H_{2x}^{1*}(\gamma_0; \omega) H_{2x}^1(\gamma_1; \alpha - \omega + \gamma_0) \int_{-\infty}^{\infty} W^*(\xi) \cdot W(\xi) d\xi \\ &= H_{2x}^{1*}(\mu + \omega - \alpha; \omega) H_{2x}^1(\alpha - \omega - \mu; \mu) \cdot \varepsilon_W. \end{aligned} \quad (32)$$

因此由 (31) 式和 (32) 式即得到 (26) 式。

证毕

定理 3 说明了平滑周期图的相容性。由 (18) 式可得, 对充分大的 T , 近似地有

$$D\{\hat{S}_{2x}^{(T)}(\alpha; \omega)\} \approx \frac{\varepsilon_W}{B_T} [\hat{S}_{2x}^{(T)}(0; \omega) \cdot \hat{S}_{2x}(0; \omega - \alpha) + |\hat{S}_{2x}^{1(T)}(2\omega - \alpha; \omega)|^2], \quad (33)$$

式中 $\hat{S}_{2x}^{(T)}$ 和 $\hat{S}_{2x}^{1(T)}$ 为相容的循环谱估计量。这个结果可用来进行有关系统识别、检测具有混合谱的复信号和具有丢失观测的谱分析等有关复循环平稳过程算法的性能分析。

5 数字仿真结果

为说明循环谱估计量的性能, 我们使用以下数字仿真模型:

$$x(t) = s_1(t) \exp(0.5jt^2) + s_2(t) \exp(1.5jt) + n(t), \quad T = 0, 1, \dots, T-1, \quad (34)$$

式中 $s_1(t)$ 是零均值的以 $0.87 \pm 0.3j$ 为极点的 AR(2) 的高斯过程, $s_2(t)$ 为均值 1 的白高斯过程, 加性噪声 $n(t)$ 由参数 1 的指数分布噪声激励参数为 $[1, -0.25]$ 的 MA(1) 滤波器产生。SNR=10dB, 且信号为等功率的。T=1024, 共进行了 30 次 Monte Carlo 试验。图 1(a) 所示为 $x(t)$ 的一阶循环谱估计的幅值 $|\hat{C}_{1x}(\alpha)|$, 可见它的峰值恰好出现在谐波频率 1.5 处。图 1(b) 为 $x(t)$ 的二阶循环谱估计的幅值 $|\hat{C}_{2x}(\alpha; -1)|$, 可见其峰值恰好出现在 1 处, 说明 LFM 信号的多普勒频率为 0.5。这些仿真结果与本文分析结果吻合。

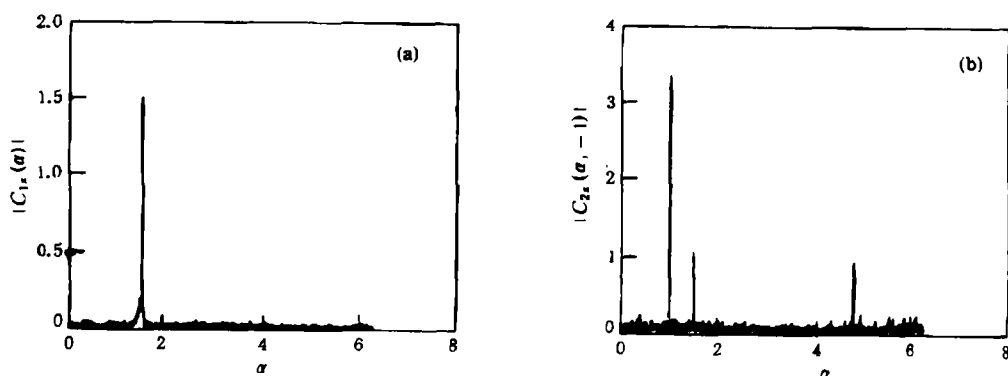


图1 一阶、二阶循环累积量估计

6 结束语

本文系统研究了复准循环平稳的非平稳信号。这种信号具有许多应用,如通信中的复调制信号,天文学中的周期观测数据,以及雷达、声纳信号等。本文在一些混合条件下,建立了高斯和非高斯的复循环平稳过程的循环谱的单记录平滑周期图估计量,证明了它们的相容性,并导出了相应的协方差表达式。总之,正如 Dandawate 与 Giannakis 在文献 [1] 中所指出的那样,复过程的循环累积量和循环谱是值得系统研究的。

参 考 文 献

- [1] Dandawate A V, Giannakis G B. IEEE Trans. on IT, 1994, IT-40(1):67-84.
- [2] Brillinger D R. Time Series: Data Analysis and Theory. San Francisco, CA: Holden-Day, 1981, 1-30.
- [3] Brillinger D R, Rosenblatt M. Asymptotic Theory of Estimates of k -th Order Spectra, in Spectral Analysis of Time Series, ed. B. Harris, New York: Wiley, 1967, 153-188.
- [4] Swami A. Signal Processing, 1994, 36(3):355-373.

NONPARAMETRIC SPECTRAL ESTIMATORS FOR SECOND ORDER (ALMOST) CYCLOSTATIONARY COMPLEX PROCESSES

Mao Yongcai Bao Zheng

(Laboratory for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract Second-order almost cyclostationary complex processes are complex random signals with almost periodically time-varying statistics. Smoothed periodograms are proposed for discrete-time complex 2nd-order cyclostationary processes as cyclic spectral estimation and are shown to be consistent. Asymptotic covariance expressions are derived along with their computable forms.

Key words Nonstationary spectral analysis, Complex cyclostationary sequences, Nonparametric cyclic-spectrum estimation, Consistency, Asymptotic covariance

毛用才: 男, 1963 年生, 副教授, 在职博士生, 现主要从事非高斯信号处理及其在雷达信号处理等方面的应用等研究。

保 铮: 男, 1927 年生, 教授, 中科院院士, 博士生导师, 现主要研究领域为信号处理和雷达系统。