

小波矩量法计算导电平面上的三维腔体散射¹

魏兴昌 梁昌洪

(西安电子科技大学 601 室 西安 710071)

摘 要 该文采用小波矩量法求解导电平面上的三维腔体散射, 利用小波变换稀疏化矩量矩阵, 加速其求逆, 减少了腔体散射的总体计算时间. 通过具体的算例, 表明小波矩量法在计算三维散射问题中是非常有效的.

关键词 小波矩量法, 腔体散射, 边界积分方程

中图分类号 TN015

1 引言

三维腔体散射问题在雷达散射截面 (RCS) 估计、电磁兼容分析等方面有重要意义. 边界积分方程方法的通用性好, 可以求解任意形状的腔体散射问题^[1,2]. 但是与用矩量法求解其它问题时一样, 边界积分方程法产生了稠密的矩量矩阵, 对其求解十分费时, 尤其对于三维电磁问题. 本文采用 Haar 小波变换矩阵^[3], 将矩量矩阵稀疏化, 加快矩阵求逆计算. 通过导电平面三维腔体散射的算例, 表明本文方法比传统矩量法效率高.

2 等效原理求解三维腔体散射问题

本文求解平面波入射下无限大导电平面下部分覆盖的矩形腔体的散射, 如图 1 所示. a, b, c 分别表示腔体尺寸, d 表示开口尺寸.

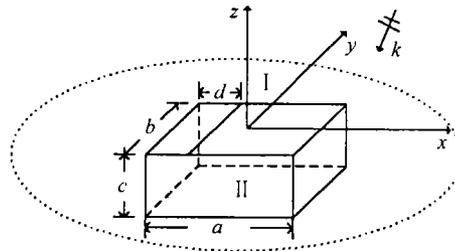


图 1 无限大导电平面下的腔体散射模型

首先, 采用等效磁流法: 用理想导体封闭腔体的开口, 在开口两侧分别放置等效磁流 M 和 $-M$, 把原求解区域分解为 I, II 两个独立部分. 其中, $M = E \times \hat{z}$, E 为开口处的切向电场. 由开口处切向磁场的连续性可得如下的方程:

$$-H_t^I(r) + H_t^{II}(r) = H_t^i(r), \quad \text{在开口上} \quad (1)$$

¹ 2001-04-02 收到, 2001-10-09 定稿
国家自然科学基金资助项目 (69871021)

其中 $H_t^I(\mathbf{r})$ 为开口封闭时, 平面入射波在开口处产生的切向磁场; $H_t^I(\mathbf{r})$ 为在 I 区开口处 M 产生的切向磁场, 可由并矢格林函数求得:

$$H_t^I(\mathbf{r}) = -\frac{2jk}{Z_0} \iint_S \overline{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot M(\mathbf{r}') ds' \quad (2)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为自由空间的波数, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 为自由空间的波阻抗, $\overline{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\mathbf{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla) \cdot G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为自由空间的并矢格林函数, $\mathbf{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$, $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{-jkR}/4\pi R$ 为自由空间的格林函数, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

$H_t^{II}(\mathbf{r})$ 为 II 区开口处 $-M$ 产生的切向磁场. 在求解 $H_t^{II}(\mathbf{r})$ 时, 若也采用类似 (2) 式的并矢格林函数积分的方法, 由于矩形腔内的并矢格林函数是级数求和, 当用脉冲基作展开函数时, 其收敛性极差. 为此, 我们采用下面所述的边界积分方程求解 $H_t^{II}(\mathbf{r})$.

(1) 式经矩量法离散化后, 可得如下的矩阵方程:

$$(\mathbf{Y}_{\text{out}} + \mathbf{Y}_{\text{in}}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (3)$$

其中 \mathbf{I} 为入射磁场, \mathbf{V} 为待求的磁流系数, \mathbf{Y}_{out} 、 \mathbf{Y}_{in} 分别为腔体外部和内部的导纳矩阵, 这两个矩阵的计算是相互独立的. \mathbf{Y}_{out} 可由 (2) 式求得, 下面讨论 \mathbf{Y}_{in} 的求法.

3 三维边界积分方程法

如图 2 所示的封闭区域, 其边界积分方程为

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 2 \int_{S'} \{ \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{J}_t(\mathbf{r}') - \frac{j}{kZ_0} [\mathbf{M}_t(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \nabla G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{jk}{Z_0} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{M}_t(\mathbf{r}') \} dS' \quad (4)$$

其中假定腔体内为真空, \mathbf{r}' , \mathbf{r} 都在表面 S' 上, \mathbf{J}_t , \mathbf{M}_t 分别是边界表面的等效电、磁流. 我们用下标 f 表示场点, 下标 s 表示源点. 令 $\hat{n}_s(\hat{n}_f)$ 为源点(场点)处的内法向单位矢量, \hat{t}_{1s} , $\hat{t}_{2s}(\hat{t}_{1f}, \hat{t}_{2f})$ 为源点(场点)处的两个单位切向矢量. 通常情况下, 我们取 \hat{t}_{1s} , \hat{t}_{2s} , \hat{n}_s 和 \hat{t}_{1f} , \hat{t}_{2f} , \hat{n}_f 都为正交系. 令 \hat{r}_{fs} 为从源点指向场点的单位矢量. 并且, 为了数值计算的方便, 把 (4) 式中的 $(\mathbf{M}_t \cdot \nabla) \nabla G_0$ 在直角坐标下展开, $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ 是直角坐标系的三个单位矢量. 经过简单的矢量运算, 可以得到

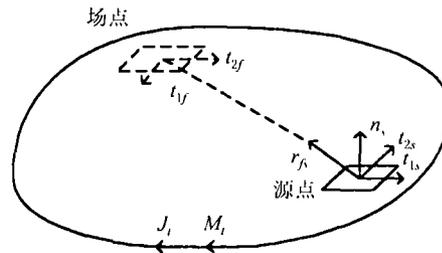


图 2 边界积分方程中的封闭表面 S

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{H} \cdot \hat{t}_{1f} \\ \mathbf{H} \cdot \hat{t}_{2f} \end{bmatrix} &= 2 \int_{s'} \frac{\partial G_0}{\partial R} \begin{bmatrix} (\hat{t}_{1f} \times \hat{r}_{fs}) \cdot \hat{t}_{2s} & -(\hat{t}_{1f} \times \hat{r}_{fs}) \cdot \hat{t}_{1s} \\ (\hat{t}_{2f} \times \hat{r}_{fs}) \cdot \hat{t}_{2s} & -(\hat{t}_{2f} \times \hat{r}_{fs}) \cdot \hat{t}_{1s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{t1s} \\ H_{t2s} \end{bmatrix} dS' \\
&- \frac{2j}{kZ_0} \int_{s'} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \begin{bmatrix} (\hat{x}_j \cdot \hat{t}_{1s})(\hat{x}_i \cdot \hat{t}_{1f}) & (\hat{x}_j \cdot \hat{t}_{2s})(\hat{x}_i \cdot \hat{t}_{1f}) \\ (\hat{x}_j \cdot \hat{t}_{1s})(\hat{x}_i \cdot \hat{t}_{2f}) & (\hat{x}_j \cdot \hat{t}_{2s})(\hat{x}_i \cdot \hat{t}_{2f}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{t1s} \\ M_{t2s} \end{bmatrix} dS' \\
&- \frac{2jk}{Z_0} \int_{s'} G_0 \cdot \begin{bmatrix} (\hat{t}_{1f} \cdot \hat{t}_{1s}) & (\hat{t}_{1f} \cdot \hat{t}_{2s}) \\ (\hat{t}_{2f} \cdot \hat{t}_{1s}) & (\hat{t}_{2f} \cdot \hat{t}_{2s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{t1s} \\ M_{t2s} \end{bmatrix} dS' \quad (5)
\end{aligned}$$

下面采用矩量法离散 (5) 式。用脉冲基展开 $\mathbf{H}_t, \mathbf{M}_t$, 把腔体开口处和腔体内壁共分为 N 个小正方形面片, 采用点选配, (5) 式经离散化后得到如下的 $2N \times 2N$ 阶方程组:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \quad (6)$$

其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 含有 $N \times N$ 个子矩阵, 每个子矩阵是 2×2 维的。

接下来把区域 II 的边界分为腔体开口区和腔体壁, (6) 式可以写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

设 K 为腔体开口处的面片数, \mathbf{A}_{22} 的维数为 $2(N-K) \times 2(N-K)$, \mathbf{A}_{11} 的维数为 $2K \times 2K$, 其它类似。

上式中下标 1, 2 分别代表开口和腔体壁, 由于腔体壁是理想导体, $\mathbf{M}_2 = 0$, 由 (7) 式可以得到

$$\mathbf{H}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{21})^{-1} \cdot (\mathbf{B}_{11} - \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{21}) \cdot \mathbf{M}_1 = \mathbf{Y}_{in} \cdot (-\mathbf{M}_1) \quad (8)$$

\mathbf{Y}_{in} 即为我们所要求的腔体内导纳矩阵, 把 \mathbf{Y}_{in} 代入 (3) 式, 即可以由 \mathbf{I} 求得 \mathbf{V} 。

4 小波变换稀疏化矩阵

在求 \mathbf{Y}_{in} 的过程中, 需要求 \mathbf{A}_{22} 的逆, \mathbf{A}_{22} 的维数为 $2(N-K) \times 2(N-K)$, K 为腔体开口处的面片数, K 随着图 1 中 d 的加大而减小。对于本文后面的算例, N 很大, K 不大, 因而 \mathbf{A}_{22} 维数很大, 求逆很费时间。对于这一问题, 人们提出过一些解决方法, 如文献 [1, 2] 采用连接算法, 将腔体内壁分为几个区域, 分别求解各个区域的边界积分方程, 再将这几个区域的导纳矩阵串、并联得到整个腔体内的导纳矩阵。小波分析的发展为处理这个问题提供了一个新的方法。本文采用小波变换矩阵对 \mathbf{A}_{22} 稀疏化, 然后求逆, 以节省计算时间。下面引入变换 $\mathbf{A}'_{22} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{T}^t$, 其中 \mathbf{T} 矩阵取为正交小波变换矩阵, t 表示转置运算。 \mathbf{T} 的构造方法如下 [3]:

本文中选用宽度为 $2m$ 的正交小波, 其滤波器系数为 $h_k, g_k = (-1)^k h_{1-k}$, 其中

$$\begin{cases} h_k \neq 0, & 0 \leq k \leq 2m-1 \\ h_k = 0, & k = \text{其它} \end{cases} \quad \text{定义 } (n/2) \times n \text{ 矩阵 } \mathbf{H}_n, \mathbf{G}_n, \text{ 其元素分别为}$$

$$\begin{aligned}
H_n(i, j) &= h_{(j-2i) \bmod n} \\
G_n(i, j) &= g_{(j-2i) \bmod n} \quad (9)
\end{aligned}$$

mod 表示取余数, 然后定义 $L \times L$ 矩阵序列

$$W_1 = \begin{bmatrix} H_L \\ G_L \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{L/2} \\ G_{L/2} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{L/4} \\ G_{L/4} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \dots \quad (10)$$

令

$$T = W_l W_{l-1} \cdots W_1 \quad (11)$$

l 为用 T 矩阵进行小波变换的迭代次数, 实际中取 l 为 3 或 4 即可. T 具有如下性质^[3]:

- (1) T 是正交矩阵;
- (2) T 是稀疏矩阵, 利用 Mallat 快速算法, 可以使 $A'_{22} = T \cdot A_{22} \cdot T'$ 的时间复杂度为 $O(L^2)$;
- (3) 变换后, A'_{22} 矩阵变为稀疏的. 为了保证计算的精度, 在对 A'_{22} 矩阵进行压缩时, 一般取门限值为其最大元素值的 1%.

利用正交小波变换矩阵 T , 可以把 Y_{in} 重写为

$$\begin{aligned} Y_{in} &= -(A_{11} - (A_{12} \cdot T^T) \cdot (T \cdot A_{22} \cdot T^T)^{-1} \cdot (T \cdot A_{21}))^{-1} \\ &\quad \times (B_{11} - (A_{12} \cdot T^T) \cdot (T \cdot A_{22} \cdot T^T)^{-1} \cdot (T \cdot B_{21})) \\ &= -(A_{11} - A'_{12} \cdot A'^{-1}_{22} \cdot A'_{21})^{-1} \cdot (B_{11} - A'_{12} \cdot A'^{-1}_{22} \cdot B'_{21}) \end{aligned} \quad (12)$$

由于 A'_{22} 是稀疏化的, 求 A'^{-1}_{22} 比求 A^{-1}_{22} 节省了计算时间. 这其中附加的时间是小波变换得到 $A'_{12}, A'_{22}, A'_{21}, B'_{21}$ 的时间, 由于 B 矩阵的性质 2, 所有这些小波变换的时间是很少的.

二维散射问题中的电场积分方程, 其积分核奇异性较弱, 用脉冲基、点选配生成的矩量矩阵其行向量相对于小波滤波器系数是衰减振荡的慢变序列, 一般使用宽度较大的 Daubechies 小波来加大压缩效果^[4,5]; 而三维散射问题中的电场积分方程, 其积分核奇异性较强, 如 (4) 式中就含有 G_0 及其导数, 此时所生成的矩量矩阵其行向量含有极窄的脉冲, 由于 Daubechies 小波宽度大于 Haar 小波 (Haar 小波的宽度为 2)^[3], 其矩量矩阵的稀疏效果反而不如 Haar 小波, 因此对于本文的三维散射问题, 我们采用 Haar 小波.

5 RCS 的计算

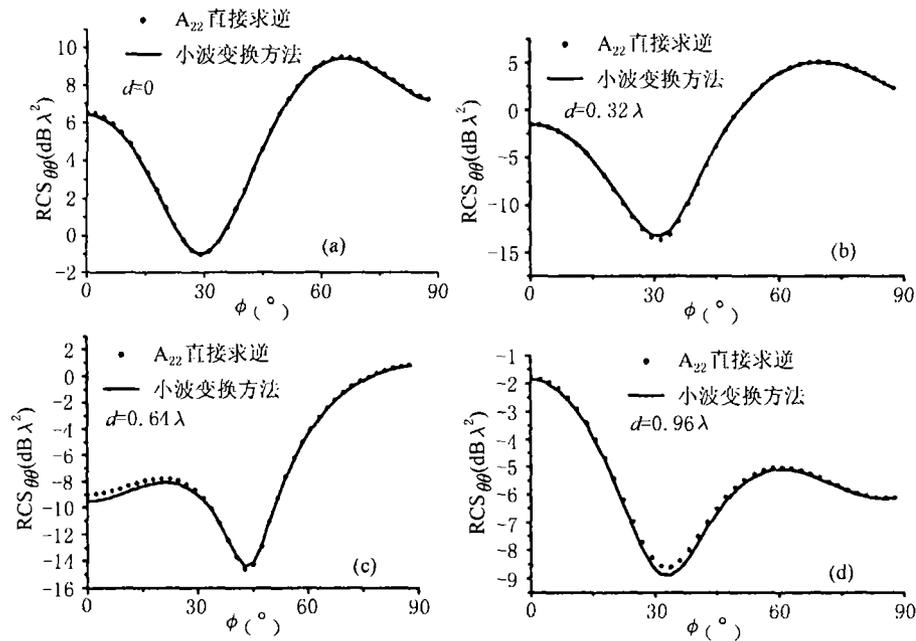
当腔体开口处的等效磁流 M 求出后, 远区散射电场 $E^s(r)$ 可以容易得到, 腔体的 $\theta\theta$ 极化 RCS 为

$$RCS_{\theta\theta} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 (|E^s_{\theta}(r)|^2 / |E^i_{\theta}(r)|^2) \quad (13)$$

本节采用上节所述的方法计算图 1 所示的腔体散射问题. 取 $b = c = 0.8\lambda$, $a = 1.28\lambda$, d 分别取为 $0, 0.32\lambda, 0.64\lambda, 0.96\lambda$. 取正方形面片边长 Δ 为 0.08λ , 这样 $N = 840$, K 分别为 160, 120, 80, 40. 采用 Haar 小波变换矩阵.

图 3 是小波变换和 A_{22} 直接求逆两种方法求得的 RCS, 取观察点处的 $\theta = 40^\circ$. 由图可见, 两种方法的差别很小. 这主要是由于小波变换的方法只是一种数值上的近似, 不是物理上的近似 (如高频方法), 因此通过控制压缩门限值, 其引入的误差是很小的.

表 1 是小波变换和 A_{22} 直接求逆两种方法所用 CPU 时间的比较, 其中小波变换的时间包括 $A'_{12}, A'_{22}, A'_{21}, B'_{21}$ 变换的总时间, 表中还给出了 A'_{22} 的非零元素百分比. 由表中可见, 对于 4 个算例, 小波变换方法的总体计算时间小于 A_{22} 直接求逆的时间, 而且由于利用的是 Haar 小波变换矩阵, 其小波变换的时间与 A_{22} 直接求逆相比是很小的.

图3 不同的 d 对应的腔体 RCS表1 小波变换和 A_{22} 直接求逆两种方法所用 CPU 时间的比较

$d(\lambda)$	A_{22} 直接求逆 (s)	小波变换方法		
		小波变换时间 (s)	A'_{22} 求逆 (s)	A'_{22} 非零元素百分比 (%)
0	1849.29	5.44	975.06	22.64
0.32	2406.95	6.98	1669.02	31.34
0.64	2641.86	5.16	1504.85	33.85
0.96	3905.64	5.38	2498.24	38.98

6 小结

本文用小波变换稀疏化边界积分方程得到的矩量矩阵, 加速其求逆, 从而减少三维腔体散射问题中导纳矩阵的计算时间。通过实例, 表明小波变换对于处理复杂三维问题是很有应用前景的。

参 考 文 献

- [1] T. M. Wang, H. Ling, Electromagnetic scattering from three-dimension cavities via a connection scheme, IEEE Trans. on AP, 1991, AP-39(8), 1505-1513.
- [2] 聂小春, 葛德彪, 袁宁, 导电平面上三维任意腔体的散射分析, 微波学报, 2000, 16(4), 440-444.
- [3] 魏兴昌, 小波分析在电磁场数值计算中的应用, [博士论文], 西安, 西安电子科技大学, 2001, 3月, 10-26.
- [4] R. L. Wagner, Weng Cho Chew, A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations, IEEE Trans. on AP, 1995, AP-43(8), 802-810.

- [5] 魏兴昌, 梁昌洪, 用周期小波变换快速求解电磁散射问题, 西安电子科技大学学报, 2000, 27(2), 248-251.

USING THE WAVELET-MOM METHOD TO
SOLVE THE PROBLEM OF SCATTERING FROM
THREE DIMENSIONAL CAVITIES

Wei Xingchang Liang Changhong

(601 Lab., Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract Scattering from three-dimensional cavities is solved using the wavelet-MoM method, while the moment matrix is sparsified with help of the wavelet transform. The advantages of this method over conventional MoM with respect to execution time is demonstrated through numerical tests.

Key words Wavelet-MoM method, Cavity-backed scattering, Boundary-integral equation

魏兴昌: 男, 1972 年生, 博士生, 主要研究兴趣为计算微波与计算电磁学.

梁昌洪: 男, 1943 年生, 教授, 博士生导师, 中国电子学会会员, IEEE Senior Member. 研究方向包括计算场论、计算微波、微波网络理论、近代数据处理、电磁散射与逆散射.