

## 自回归模型的时变小波包分解<sup>1</sup>

方 浩 周 冰 薛培鼎 冯祖仁

(西安交通大学系统工程研究所 西安 710049)

**摘 要** 该文提出了一种基于动态规划的时变小波包分解算法。利用此算法进行小波包分解可以解决以往分解算法如单树算法无法进行时频分解而双树算法只能进行二叉树分解的问题。通过对时变自回归模型的分解仿真实验,表明在处理时变信号方面,此分解算法比其它算法更具有灵活性。

**关键词** 小波包, 动态规划, 时频分解

**中图分类号** TN911.7

### 1 引 言

正交基分解在信号的压缩和编码方面有着广泛的应用。近年来由于小波基具有在不同尺度下捕获信号特征的灵活性,小波和小波包分解已经逐步取代了经典的傅里叶和 DCT 分解法<sup>[1,2]</sup>。

常见的小波包分解方法有单树算法、双树算法和时频树算法。单树算法是利用滤波器组在整个时间段内对信号进行小波包的分解,其模型不能随时间而改变,因此不能适应时变信号的分解。虽然采用双树算法和时频树算法可以进行时变分解,但仍然存在两点不足之处:(1)由于算法本身是二叉树结构,所以对时间的分解限制只能是二叉树形式。(2)由于上述原因,当信号在时域发生平移时,小波包分解模型不是随之发生平移,而是发生很大的变化。为弥补以上两点不足之处,本文基于动态规划的思想,提出一种更为灵活的小波包分解法。

### 2 单树算法

单树算法做为时变小波包分解的核心,是利用滤波器组对信号进行最为合理的频域分解。其频域优化分解模型的建立要兼顾建模复杂性和拟合精度两方面的要求。本文将这一问题量化为一个评价函数<sup>[3]</sup>,利用这一评价函数可以将上述限制性问题转化为非限制性问题。

$$J(\text{node}) = N \log \text{Err} + \lambda d(\text{node}) \quad (1)$$

其中  $N$  为数据长度,  $\text{Err}$  为均方误差,  $d$  为模型的小波包分支数,  $\lambda$  是为平衡二者而引入的拉格郎日算子。因此,能使  $J(\text{node})$  最小化的模型就是所要寻找的优化小波包分解模型。单树形算法应用方法如下:

- (1) 利用先验知识,生成“全”小波包树模型,求取小波包分支的权值,并计算均方误差。
- (2) 用单树算法对小波包树进行修剪。选取权重最小的分支,计算  $J(\text{node})$ 。去掉此分支,令  $d'(\text{node}) = d(\text{node}) - 1$ ,再次计算均方误差  $\text{Err}'$  和  $J'(\text{node})$ ,若  $J'(\text{node}) < J(\text{node})$ ,则此分支可以舍去,并记  $d(\text{node}) = d(\text{node}) - 1$ ,否则保留此分支。
- (3) 按小波包树由叶向根方向进行修剪,在每一层上依分支权重的大小,由小到大进行筛选,直到所有分支都被筛选过一次。最后得到的模型就是使  $J(\text{node})$  最小的优化小波包分解模型。

<sup>1</sup> 1999-05-21 收到, 2000-05-19 定稿

经过单树算法对小波包树的修剪，可以得到原信号的优化频域分解模型。但单树算法所建立的优化小波包分解模型不能随时间而改变，因此在处理时变信号时，不能很好地与信号的时变特征相匹配，分解效果不理想。

### 3 时变分解算法

为了解决单树算法无法进行时变分解的问题，在单树算法的基础上又提出了双树算法和时频树算法。这两种算法都是在对时域分解的同时在每一时间段上伴随有对频域的分解。但由于这两种算法固有的二叉树特点，所以对时域的分解形式有严格的限制，即只能是二二叉形式。考虑一个时变系统由  $ABCD$  四段构成，若  $A$  的统计特性明显与  $BCD$  不同，这时信号应被分为  $A$  和  $BCD$  两段。但用二叉树形式分解时，原信号第一次被分解为  $AB$  和  $CD$  两段，要经过第二次分解才能将统计特性完全不同的  $A$  段分离出来。针对这一问题，本文利用动态规划的思想，在小波包分解的基础上提出一种更为灵活的时变分解算法。

时变分解算法运用动态规划对信号进行时域分解。首先引入时域分辨率  $L$ ，用  $L$  划分时间，在分解出的各段上用单树算法进行频域最优分解，并求出各段上的最小评价函数  $J_{\min}(\text{node})$ 。然后利用动态规划中寻找最优路径的方法，以各段上的  $J_{\min}(\text{node})$  做为代价函数来寻找最优划分点，从而得出对时域的最优分解。

记  $\pi_k$  为  $\{[0, kL - 1], k \in [1, 2, \dots, M]\}$  上一个划分， $\pi_k = [s_1, s_2, \dots, s_p]$ ，则  $J_k = \sum_{\pi_k} J(s_n)$ ，其中  $J(s_i)$  为  $s_i$  段上最小评价函数。这时寻找原信号在整个时间段  $[0, ML - 1]$  上的最优分解问题就转化为寻找最优分解集  $\pi_M^*$ ，其中  $\pi_M^*$  是使  $J_M$  最小化的划分集合<sup>[4]</sup>。

$$\pi_M^* = \arg \min_{\pi_M} J_M = \arg \min_{\pi_M} \sum_{s_i \in \pi_M} J(s_i) \tag{2}$$

对于时间段  $\{[0, kL - 1], k \in [1, 2, \dots, M]\}$  上的信号，若用经典动态规划中寻找最优路径方法来寻找最优分解，将所有可能的划分遍历一遍，其运算量为  $O(2^K)$ 。当  $K$  较大时，这种搜寻方法显得不十分经济。为了节省运算量，本文利用评价函数  $J(\text{node})$  的可加性来简化计算。具体运用如图 1 所示：

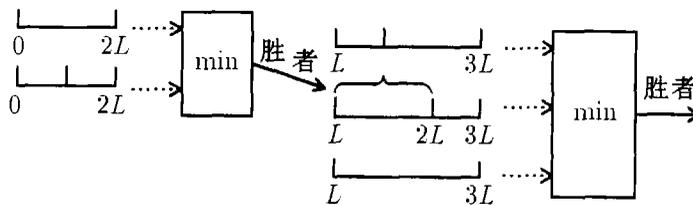


图 1 基于动态规划的时变分解算法

对  $[0, 2L - 1]$  进行时间分解，只有两种可能的划分。应用单树算法对这两种划分分别计算评价函数  $J_{0,2L}$  和  $J_{0,L} + J_{L,2L}$ ，选具有最小评价函数的划分为胜者并记录这一最优分解。再对  $[0, 3L - 1]$  进行分解，这时有四种可能的划分，但利用上一次分解决策的胜者，只需进行三次划分测试即可。因此利用评价函数的可加性，可将计算规模由指数次降为线性次。即对长度为  $[0, ML - 1]$  的信号，完成一次划分测试所需的计算量由原来的  $O(2^M)$  降为  $O(M^2) = O(1 + 2 + \dots + M)$ 。这一措施的实施，是建立在评价函数可加性基础之上的。文献 [5] 证明，当正交滤波器组具有近似正交边界时，评价函数具有可加性。

寻求最优划分点的方法如图 2 所示。设  $J_k^*$  是  $[0, kL - 1]$  上的最小评价函数,  $\pi_k^*$  为其最优划分集合, 则  $J_k^*$  满足以下递推关系:

$$J_k^* = \min_{0 \leq t \leq k} [J_t^* + \Delta J_{t,k}], \quad k \in [1, 2, \dots, M] \quad (3)$$

其中  $\Delta J_{t,k}$  是  $[tL, kL - 1]$  上最小评价函数。由 (3) 式可以得出  $[0, kL - 1]$  上最优划分点为  $b(k) = \arg \min_{0 \leq t \leq k} [J_t^* + \Delta J_{t,k}]$ 。记  $B = \{b(k), k \in [1, 2, \dots, M]\}$ , 则  $[0, kL - 1]$  各段上的最优划分点被保留在集合  $B$  中。原信号的最优分解集  $\pi_M^*$  可通过查找集合  $B$  获得。具体做法是: 借用动态规划思想, 由后向前递推  $t_i = b(t_{i+1})$ , 则  $\pi_M^* = [t_1L, t_2L, \dots, t_iL]$ 。

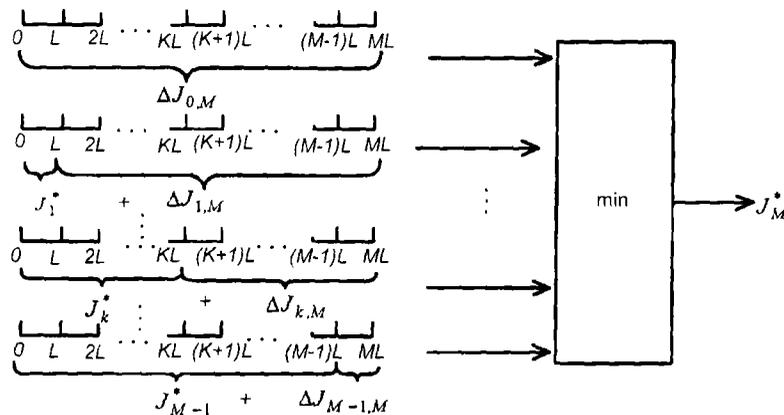


图 2 时变小波包算法寻找最优划分点示意图

时变小波包分解算法总结如下:

(1) 应用单树算法计算所有以时域分辨率  $L$  为最小单位的分段  $\{[iL, jL - 1], i \in [0, 1, \dots, M - 1], j \in [i + 1, \dots, M]\}$  上最优小波包分解模型及最小评价函数  $\Delta J_{i,j}$ 。

(2) 计算  $J_k^*$  并记录子段  $[0, kL - 1]$  上最优划分点  $b(k), k \in [1, \dots, M]$ 。

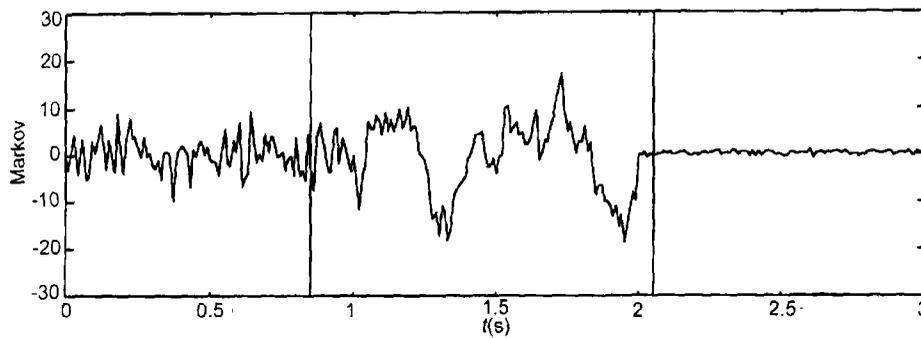
(3) 信号在  $[0, ML - 1]$  上的最优分解集可用动态规划中搜寻最优路径的方法获得。在最优划分点集合  $B$  中从后向前递推, 最先找到  $[0, ML - 1]$  上的划分点为  $b(M)$ , 分解出  $[b(M)L, ML - 1]$  子段。而后在  $[0, b(M)L - 1]$  上寻找最优划分点, 在集合  $B$  中用查表的方法找出  $[0, b(M)L - 1]$  上划分点为  $b(b(M))$ , 可分解出  $[b(b(M))L, b(M)L - 1]$  子段, 依次递推, 直至  $b(t_i) = 0$ 。

### 4 算 例

为了验证时变小波包分解算法相对于以往分解算法的优越性, 本文对一阶时变自回归系统进行了时频分解。一阶 Markov 序列具有时变的自相关函数和噪声方差。第一段  $t \in [0, 1]$  上序列方差  $\text{Var}=100.0$ , 自相关函数  $\rho = 0.1$ 。第二段  $t \in [1, 2]$  上  $\text{Var}=100.0$ ,  $\rho = 0.9$ 。第三段  $t \in [2, 3]$  上  $\text{Var}=1$ ,  $\rho = 0.1$ 。这种情况下, 分解结果应将时域分解为三段, 最为理想的划分点为  $t = 1.00$  和  $t = 2.00$

分别利用时变小波包分解算法和双树算法对这一序列进行时频分解。利用时变小波包算法进行分解的结果如图 3 所示。可以看出, 与信号特征相匹配, 时域被分解为三段, 分解点分别位于  $t=0.85$  和  $t=2.05$ 。在各时间段内用滤波器组进行频域分解, 并用单树算法对由滤波器组构

成的小波包树进行修剪, 评价函数最小值变化如图 3(b) 所示。在第一时间段  $t \in [0, 0.85]$  上有 15 个评价函数最小值出现, 而每一个新的评价函数最小值的出现都意味着一个小波包树分支被筛选掉, 即在第一时间段有 15 个小波包树分支被修剪掉。在  $t \in [0.85, 2.05]$  上有 1 个分支被修剪掉, 而在  $t \in [2.05, 3.00]$  上有 24 个分支被修剪掉。经过修剪的滤波器组就是对各子段上信号的最优频域分解。



(a) 时域分解结果

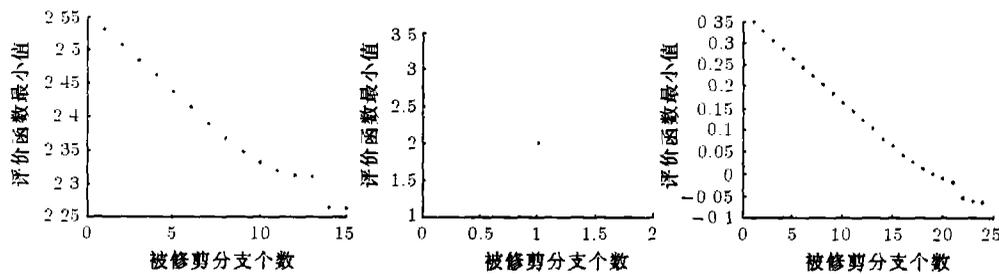
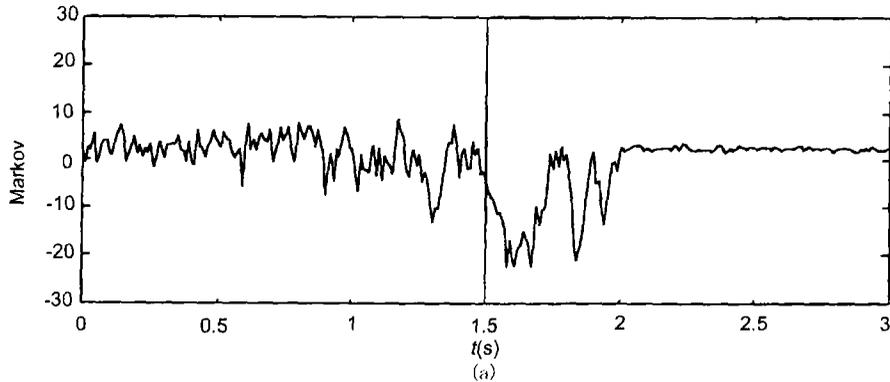
(b) 各时段  $J(\text{node})$  变化趋势, 横坐标为被修剪分支个数, 纵坐标为评价函数最小值

图 3 时变小波包分解结果

双树算法分解的结果如图 4 所示。由实验结果可以看出, 由于双树算法只能进行二二叉分解, 所以时域分解点在  $t=1.5$ 。在各时域段内用单树算法进行频域分解, 分别有 7 个和 18 个分支被修剪掉。

仿真实验结果表明, 由于二二叉特性的局限, 双树算法未能对这一序列做出合理的分解, 在时域上只将序列做了平分, 不能与序列特性很好地匹配。而利用时变小波包算法分解的结果, 虽然存在偏差, 但能与序列特性做到良好的匹配, 可以较为准确地分解出三段统计特性不同的序列段。



(a) 时域分解结果

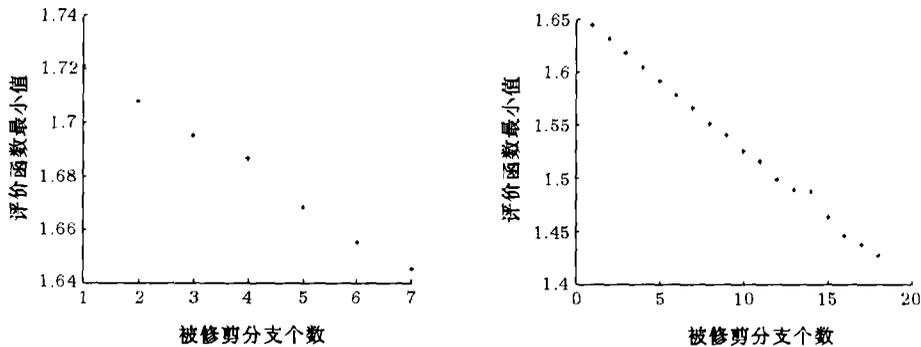
(b)  $J(\text{node})$  各时段变化趋势, 横坐标为被修剪分支个数, 纵坐标为评价函数最小值

图 4 双树算法分解结果

## 5 小 结

本文针对单树算法和双树算法无法圆满解决时变信号分解的问题, 提出了一种基于动态规划的灵活的时变小波包算法. 此算法具有以下优越性: (1) 时变小波包算法以单树算法为核心, 进行频域最优分解. 同时引入时变分解的概念, 解决了单树算法无法进行时变分解的问题. (2) 时变小波包算法通过引入时域分辨率  $L$ , 并借助动态规划思想寻找时域最优划分点, 解决了双树算法和时频树算法对时间的二分支分解的限制, 较双树算法和时频树算法可进行更为灵活地分解. (3) 通过调整时域分辨率  $L$ , 可以改善算法的精度.

本算法仍存在不足之处: (1) 其灵活性是以计算规模的增加为代价的, 对每一子段计算评价函数, 搜索最优划分点, 计算量很大. 这种情况在分辨率高的时候更为突出. 虽然利用评价函数的可加性可以降低运算规模, 但若要进行二维信号分解, 计算量依然很大. (2) 时域分解所能达到的最小单位即时域分辨率, 也要受到滤波器长度的限制, 并不能获得任意高的分辨率.

## 参 考 文 献

- [1] M. I. Dorosloacki, H. Fan, Wavelet-based linear system modeling and adaptive filtering, IEEE Trans. on Signal Processing, 1996, 44(5), 1156-1167.
- [2] I. Scott, B. Mulgrew, Nonlinear system identification and predication using orthogonal functions, IEEE Trans. on Signal Processing. 1997, 45(7), 1842-1853.

- [3] M. K. Tsatsanis, G. B. Giannakis, Time-varying system identification and model validation using wavelet, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12), 3512–3523.
- [4] Zixing Xiong, K. Ramchandran, Flexible tree-structured signal expansions using time-varying wavelet packets, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 45(2), 333–344.
- [5] C. Herley, J. Kovacevic, Tiling of time-frequency plane: construction of arbitrary orthogonal bases and fast tiling algorithms, *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12), 3341–3360.

## TIME-VARYING WAVELET PACKETS DECOMPOSITION FOR AR MODEL

Fang Hao    Zhou Bing    Xue Peiding    Feng Zuren

*(Systems Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)*

**Abstract** Based on dynamic programming, a time-varying wavelet packets decomposition algorithm is proposed. Using this algorithm, the problems, that the single tree algorithm cannot adapt to nonstationary signals and the double tree algorithm has strict binary restriction, are solved. Simulation results varify that this algorithm is more flexible than the others in time-varying signal processing.

**Key words** Wavelet packets, Dynamic programming, Time-frequency decomposition

方 浩: 男, 1973 年生, 博士生, 研究领域为机器人学与机器人控制.  
周 冰: 女, 1972 年生, 博士生, 研究领域为机器人学与机器人控制.  
薛培鼎: 男, 1942 年生, 教授, 研究领域为信号处理与控制系统设计与集成.  
冯祖仁: 男, 1953 年生, 教授, 博士生导师, 研究领域为 CIMS, 机器人控制.